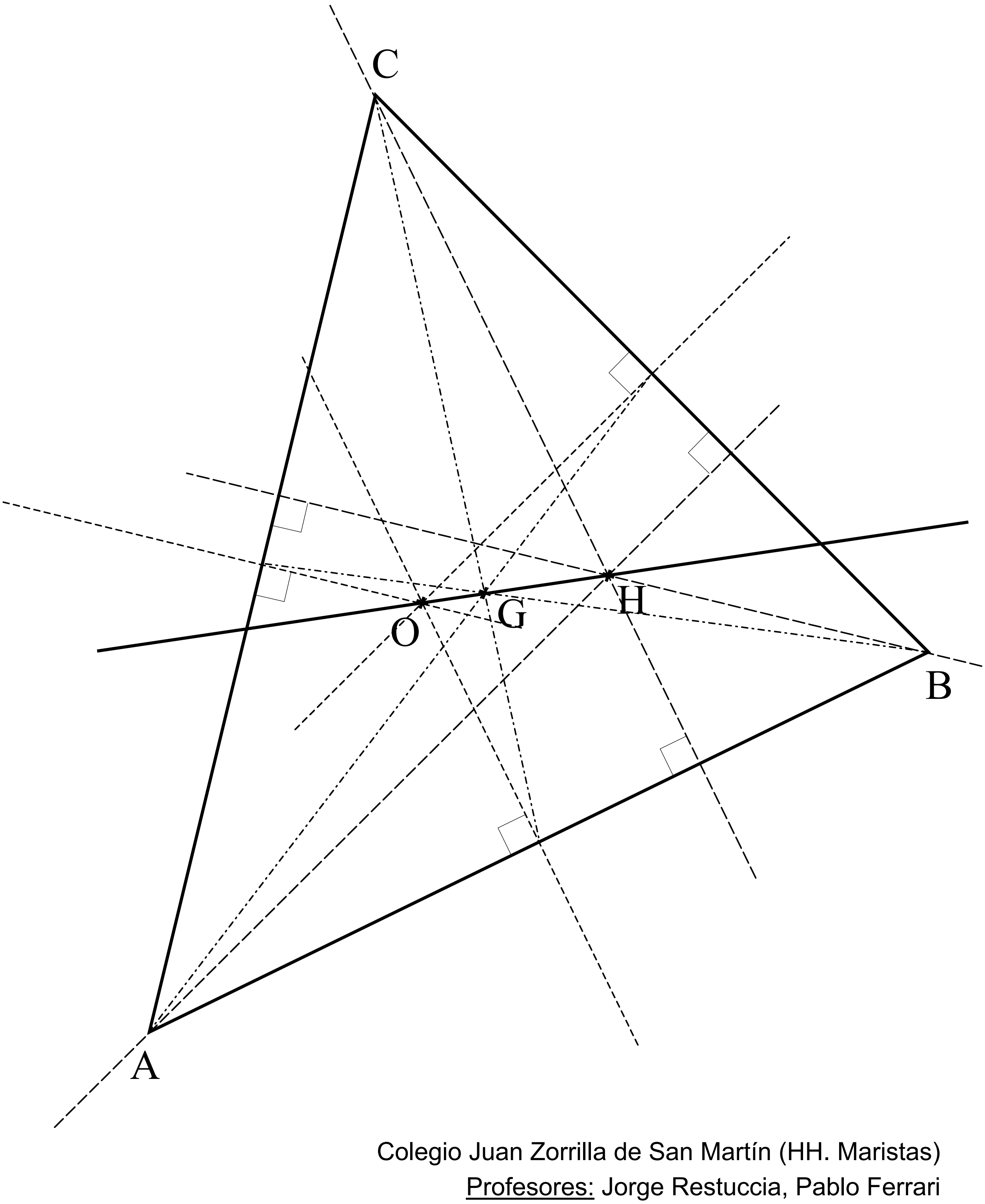
Curso de Geometría Métrica

Matemática “B” de 5º año (2º de bachillerato diversificado), orientación científica



Colegio Juan Zorrilla de San Martín (HH. Maristas)
Profesores: Jorge Restuccia, Pablo Ferrari

Abril de 2003

Curso de Geometría Métrica

Introducción

La Geometría es una de las ramas más antiguas e importantes de la Matemática. El intento de Euclides de establecer un desarrollo riguroso, bajo los principios de la lógica formal de la época, sentó las bases de la Geometría elemental y su enseñanza se desenvolvió, durante siglos, de acuerdo a los principios establecidos por el geómetra griego, aunque con aportes importantes de muchos otros matemáticos. Hoy en día hay diversas vertientes de esa enseñanza.

El curso de Matemática "B" de 5º año (2º de bachillerato diversificado, orientación científica), enfoca los temas de la Geometría euclideana. Como todo curso tiene dos aspectos fundamentales: el informativo y el formativo.

Respecto al primero, el volumen de información "nueva" que el estudiante recibe es, relativamente, escaso. Se trata de analizar los conceptos ya adquiridos en la escuela y años anteriores del liceo, desde un punto de vista superior, agregándose algunos temas.

En nuestra opinión, lo más importante del curso es su aspecto formativo. El modelo axiomático-deductivo de la Geometría, aplicado a conceptos asumidos hace tiempo por el estudiante, permite que se desarrolle su capacidad crítica, que se discipline en el uso de las estructuras del razonamiento, que adquiera interés en el análisis y la resolución de problemas y pierda el "miedo" a enfrentarlos, entre otras cosas.

El presente trabajo pretende ser una ayuda para este curso. No se trata de sustituir los textos, sino de complementarlos. Se ha realizado sobre la base de las clases dictadas durante los últimos años, por lo cual el orden de los temas y el enfoque de los mismos se adapta más que aquellos al desarrollo del curso.

Si bien se trata de exponer la Geometría elemental con la mayor rigurosidad posible, somos conscientes que algunos temas presentan dificultades teóricas que exceden ampliamente el nivel del curso. Así es que, en algunos casos, hemos optado por admitir las conclusiones, sin desarrollar las teorías que las respaldan. Por lo tanto estos apuntes no pretenden ser un tratado de Geometría, ni mucho menos, sino, como se dijo antes, una ayuda para el estudio del curso teórico.

Prof. Pablo Ferrari
Prof. Jorge Restuccia

Capítulo 1

En este capítulo encontraremos:
Primeros axiomas: axioma de existencia, axioma de determinación de la recta, axioma de orden en la recta, axioma de división del plano, axioma de paralelismo (o axioma de Euclides).
Primeras definiciones: figura, relación de alineación, rectas secantes, relaciones de orden en la recta, semirrecta, segmento de recta, figura convexa, semiplano, ángulos, triángulo, polígonos, rectas paralelas.
Teoremas relacionados.

1. Axioma I (Existencia):

Existe un conjunto –llamado plano–, de infinitos elementos llamados puntos.
Existen infinitos subconjuntos del plano –llamados rectas–, de infinitos puntos cada uno.

2. Notación:

Al plano lo llamaremos π. A los puntos los notaremos con letras mayúsculas y a las rectas con letras minúsculas.

3. Definición (figura):

Se llama **figura** a todo subconjunto no vacío del plano.

4. Nota:

Llamaremos **lugar geométrico** de una propiedad determinada a la figura formada por todos los puntos que cumplen dicha propiedad.

5. Axioma II (Determinación de la recta):

Para todo par de puntos distintos, existe una única recta a la cual pertenecen.

6. Notación:

A la recta determinada por los puntos A y B la notaremos AB.

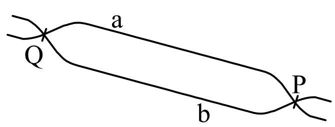
7. Definición (relación de alineación):

Dados tres o más puntos, diremos que están **alineados** si y sólo si existe una recta a la cual pertenecen.

8. Teorema:

La intersección de dos rectas distintas contiene a lo sumo un punto.

H)	**T)**
$a \neq b$	$a \cap b = \phi$ o $\exists!$ P tal que $P \in a \cap b$



Si $a \cap b = \phi$ se cumple la tesis
Si $a \cap b \neq \phi \Rightarrow \exists$ P tal que $P \in a \cap b$
Razonando por el absurdo, supongamos que $\exists$ $Q \neq P$ tal que $Q \in a \cap b \Rightarrow$ (por axioma ii) $a = b$ (contradice la hipótesis).

9. Definición (rectas secantes o que se cortan):

Dos rectas r y s son **secantes** o **se cortan** si y sólo si su intersección contiene un único punto.

10. Axioma III (Orden en la recta):

Las rectas son conjuntos totalmente ordenados, abiertos y densos.[1]

[1] Definición:
Una relación R en un conjunto A, es una **relación de orden** si y sólo si cumple con las siguientes propiedades:

i) $\forall a \in A$, aRa (propiedad idéntica)
ii) aRb, bRa $\Rightarrow a = b$ (propiedad antisimétrica)
iii) aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc (propiedad transitiva)

Definición:
Un conjunto A es **totalmente ordenado** si b sólo si existe una relación de orden R tal que, $\forall a \in A$ y $\forall b \in A$, aRb o bRa.

11. Definiciones (relaciones de orden en la recta):
A la relación de orden definida en al recta, según el axioma iii, la llamaremos **precede o coincide**, y a la relación de orden estricta asociada a ésta, la llamaremos **precede**, y la notaremos mediante el signo $\prec$. A la relación inversa de aquélla la llamaremos **sigue o coincide**, y la estricta asociada la llamaremos **sigue**, y la notaremos mediante el signo $\succ$.

12. Definición (semirrecta):
Dados una recta r y un punto A perteneciente a ella, definimos **semirrecta** $\overline{\mathrm{Ar}}$ al conjunto $\overline{\mathrm{Ar}} = \{P \in r \,/\, P = A$ o $A \prec P\}$. Al punto A lo llamaremos **origen** de la semirrecta. Diremos que r es la recta sostén de la semirrecta $\overline{\mathrm{Ar}}$. Llamaremos semirrecta opuesta de $\overline{\mathrm{Ar}}$ al conjunto $\mathrm{op}(\overline{\mathrm{Ar}}) = \{P \in r \,/\, P = A$ o $A \succ P\}$.

13. Definición (segmento de recta):
Dados dos puntos A y B, definimos **segmento** $\overline{\mathrm{AB}}$ al conjunto $\overline{\mathrm{AB}} = \{P \in r \,/\, A \prec P$ y $P \prec A$, o $P = A$, o $P = B\}$. Los puntos A y B se llaman **extremos** del segmento, y los restantes puntos del segmento se llaman **puntos interiores**.

14. Observación (segmento nulo):
Si los puntos A y B coinciden, al segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ le llamaremos **segmento nulo** y lo notaremos con la letra $\wp$. El segmento nulo es una figura formada por un único punto.

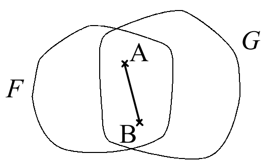
15. Definición (figuras convexas):
F es una **figura convexa** si y sólo si para todo par de puntos A y B de *F*, se cumple que el segmento $\overline{\mathrm{AB}}$ está incluido en *F*.

16. Observación:
El conjunto vacío es una figura convexa.

17. Teorema:
La intersección de dos figuras convexas no disjuntas es convexa.

H)
F figura convexa
G figura convexa
$F \cap G \neq \phi$

T)
$F \cap G$ convexa



Sean A y B pertenecientes a $F \cap G \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{A y B pertenecen a } F \Rightarrow (F \text{ convexa}) \ \overline{\mathrm{AB}} \subseteq F \\ \text{A y B pertenecen a } G \Rightarrow (G \text{ convexa}) \ \overline{\mathrm{AB}} \subseteq G \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (intersección de conjuntos) $\overline{\mathrm{AB}} \subseteq F \cap G \Rightarrow$ (definición de figura convexa) $F \cap G$ convexa.

Nota: A partir de la relación de orden total R, podemos definir la relación R' de **orden estricto**, tal que aR'b si y sólo si aRb y $a \neq b$.

Definición:
b **está entre** a y c si y sólo si aR'b y bR'c, siendo R' una relación de orden estricto.

Definición:
Un conjunto A totalmente ordenado es **denso** si y sólo si, $\forall\, a \in A$ y $\forall\, c \in A$, $\exists\, b \in A$ tal que b está entre a y c.

Definición:
La relación R^{-1} es **inversa** de la relación R si y sólo si, $\forall\, a \in A$ y $\forall\, b \in A$, $aR^{-1}b \Leftrightarrow bRa$.

Observación: si R es un a relación de orden, R^{-1} también lo es.

Definición:
El conjunto A totalmente ordenado es **abierto** si y sólo si $\forall\, b \in A$, $\exists\, a \in A$ y $c \in A$ tales que aR'b y bR'c.

18. Axioma IV (División del plano):

Para toda recta r incluida en π existen dos únicos subconjuntos de π tales que:

iv.1. $\forall$ P perteneciente a r, P no pertenece ninguno de esos subconjuntos.

iv.2. $\forall$ P y Q, si dos puntos P y Q pertenecen a uno de esos subconjuntos, entonces el segmento que determinan está incluido en ese subconjunto.

iv.3. $\forall$ P y Q, si P pertenece a uno de esos subconjuntos, y Q pertenece al otro subconjunto, entonces el segmento que determinan intersecta a r.

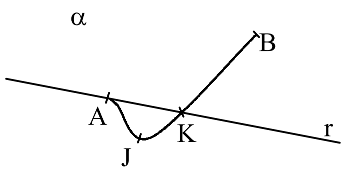
19. Definición (semiplano):

Se llama **semiplano abierto** de borde r a cada uno de los subconjuntos definidos por r, según el axioma iv.
Se llama **semiplano** de borde r a la unión de la recta r con el semiplano abierto de borde r. Notaremos r(P) al semiplano de borde r que contiene al punto P, y op[r(P)] a su opuesto.

20. Teorema:

H)
r recta
α uno cualquiera de los semiplanos de borde r
$A \in r$
$B \in \alpha$

T)
$\overline{AB} \subset \alpha$



Si $B \in r \Rightarrow AB = r \Rightarrow$ (definición de segmento de recta) $\overline{AB} \subset r$

Si $B \notin r$: razonando por el absurdo, supongamos que $\overline{AB} \not\subset \alpha \Rightarrow \exists\, J \in \overline{AB}$ tal que $J \notin \alpha$.

$J \notin \alpha \Rightarrow$ J pertenece al semiplano abierto, opuesto a α

$B \in \alpha$, $B \notin r$ $\Rightarrow$ B pertenece al semiplano abierto α

$\Rightarrow$ (axioma iv.3) $\exists\, K \in \overline{JB} \cap r$

$A \in r$

$A \prec J \prec K \Rightarrow A \neq K$

$\Rightarrow AK = r \Rightarrow B \in r$ (contradice que $B \notin r$)

$\therefore\ \overline{AB} \subset \alpha$

21. Observación:

A partir del axioma iv, es inmediato que el semiplano abierto es una figura convexa, y con el teorema 20, queda demostrado que el semiplano también lo es.

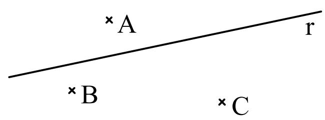
22. Nota:

Diremos que una recta r **separa** a dos puntos si y sólo si dichos puntos están contenidos en semiplanos abiertos de borde r opuestos.

23. Teorema (de Pasch):

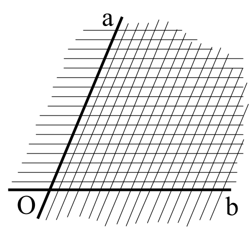
H)
r separa a A y B
r no separa a B y C

T)
r separa a A y C



Demostración inmediata a partir del axioma iv.

24. Definición (ángulo convexo):



Dadas dos semirrectas $\overrightarrow{Oa}$ y $\overrightarrow{Ob}$, distintas y no opuestas, se llama **ángulo convexo** $\angle aOb$ a la intersección del semiplano de borde a que contiene a $\overrightarrow{Ob}$ con el semiplano de borde b que contiene a $\overrightarrow{Oa}$. Las semirrectas $\overrightarrow{Oa}$ y $\overrightarrow{Ob}$ se llaman **lados**, y el punto O se llama **vértice**.

25. Definición (ángulo cóncavo):

Dado un ángulo convexo $\angle aOb$, se llama **ángulo cóncavo** $\angle aOb$ al complemento del ángulo $\angle aOb$ unión los lados del ángulo.

26. Observación:
Estas definiciones de ángulo no permiten resolver en su totalidad algunos problemas; por ejemplo, los relacionados con la suma de ángulos. Otras definiciones resuelven algunos y generan otros. Las más satisfactorias desde el punto de vista de la rigurosidad teórica son poco intuitivas y se alejan del nivel de este curso.

27. Definiciones (punto interior y rayo interior):
Un **punto interior** a un ángulo es un punto del ángulo que no pertenece a los lados. Una semirrecta que tiene origen en el vértice del ángulo y pasa por un punto interior se llama **rayo interior** del ángulo.

28. Definición (ángulo reglado):
Dado un ángulo $\angle aOb$, se llama **ángulo reglado** $\angle aOb$ al conjunto formado por los lados del ángulo y sus rayos interiores.

29. Observación:
El ángulo es un conjunto de puntos y el ángulo reglado es un conjunto de semirrectas.

30. Nota:
De ahora en adelante llamaremos **ángulo** al ángulo convexo.

31. Definición (ángulo llano):
Dadas dos semirrectas opuestas $\overrightarrow{Oa}$ y $\overrightarrow{Ob}$, se llama **ángulo llano** $\angle aOb$ a cualquiera de los semiplanos de borde a.

32. Definición (ángulos consecutivos):
Dos ángulos son **consecutivos** si y sólo si tienen un lado común y están contenidos en semiplanos opuestos respecto a ese lado.

33. Definición (ángulos adyacentes):
Dos ángulos son **adyacentes** si y sólo si son consecutivos y su unión es un ángulo llano.

34. Definiciones (triángulo):
Dados tres puntos no alineados A, B y C, llamaremos **triángulo** ABC a la intersección del ángulo $\angle CAB$ con el semiplano BC(A). A los puntos A, B y C se les llama **vértices**; a los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se les llama **lados**; y a los ángulos $\angle BAC$, $\angle ABC$ y $\angle ACB$ se les llama **ángulos** o **ángulos internos** del triángulo. A los ángulos adyacentes de cada ángulo interno se les llama **ángulos externos** del triángulo.

35. Definición (cuadrilátero convexo):
Dados cuatro puntos no alineados tres a tres y tales que existen cuatro pares de esos puntos que dejan a los restantes en un mismo semiplano respecto a la recta que determinan, llamaremos **cuadrilátero convexo** a la intersección de esos cuatro semiplanos. Se llama **vértices** a los puntos dados, y se define **lados** y **ángulos** del cuadrilátero de forma análoga a los del triángulo. Diremos que dos vértices son consecutivos si son extremos de un mismo lado. Llamaremos **diagonal** al segmento cuyos extremos son dos vértices no consecutivos. Llamaremos **lados opuestos** en el cuadrilátero a dos lados que no tienen extremos comunes; y llamaremos ángulos opuestos en el cuadrilátero a dos ángulos que no tienen lados comunes.

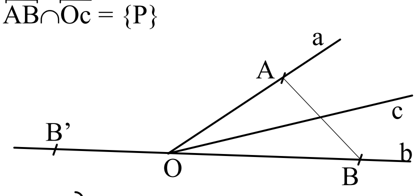
36. Nota (polígonos convexos):
De la misma forma, se define **polígono convexo** de n lados (eneágono) considerando n puntos en las condiciones expresadas en la definición de cuadrilátero convexo.

37. Teorema (del Rayo interior):

Todo rayo interior a un ángulo convexo, intersecta en un punto a cualquier segmento cuyos extremos pertenezcan a lados distintos del ángulo.

H)
$\angle aOb$ ángulo convexo
$\overrightarrow{Oc}$ rayo interior del $\angle aOb$
$A \in \overrightarrow{Oa}$
$B \in \overrightarrow{Ob}$

T)
$\exists$ P tal que $\overline{AB} \cap \overrightarrow{Oc} = \{P\}$



Sea $B' \in op(\overrightarrow{Ob}) \Rightarrow O \in \overline{BB'}$
$O \in a$
$\Rightarrow \overline{BB'} \cap a = \{O\} \Rightarrow_{\text{(axioma iv.3)}} B' \in op[a(B)]$
$A \in a$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow_{\text{(teorema 20)}} \overline{AB'} \subset op[a(B)]$
Por definición de ángulo y de rayo interior: $\overrightarrow{Oc} \subset a(B)$
$O \neq A$
$\Rightarrow \overline{AB'} \cap \overrightarrow{Oc} = \phi$

Por demostración análoga a la anterior: $\overline{AB'} \subset b(A)$
Por definición de ángulo y rayo interior: $\overrightarrow{Oc} \subset b(A)$
$O \in b$
$\Rightarrow op(\overrightarrow{Oc}) \subset op[b(A)]$
$O \neq B'$
$\Rightarrow \overline{AB'} \cap op(\overrightarrow{Oc}) = \phi$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{AB'} \cap c = \phi \Rightarrow$ c no separa a A y B'
$\overline{BB'} \cap a = \{O\} \Rightarrow$ c separa a B y B'
$\Rightarrow_{\text{(teorema de Pasch)}}$ c separa a A y B $\Rightarrow \exists$ P tal que $\overline{AB} \cap c = \{P\}$
Por definición de ángulo y teorema 20: $\overline{AB} \subset b(A)$
$op(\overrightarrow{Oc}) \subset op[b(A)]$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow P \in \overrightarrow{Oc} \Rightarrow \exists$ P tal que $\overline{AB} \cap \overrightarrow{Oc} = \{P\}$

38. Definición (paralelismo):

r es **paralela** a s si y sólo si $r = s$ o $r \cap s = \phi$. Lo notaremos $r \| s$.

39. Axioma V (Axioma de Euclides)

Dados un punto y una recta cualesquiera, existe una única paralela a la recta que pasa por el punto.

40. Teorema:

El paralelismo es una relación de equivalencia en el conjunto de las rectas del plano.[2]

<u>Subteorema 1</u> (propiedad idéntica):
Por definición, a es paralela a a

[2] Definición:
Una relación R en un conjunto A, es una **relación de equivalencia** si y sólo si cumple con las siguientes propiedades:

i) $\forall a \in A$, aRa (propiedad idéntica)
ii) aRb $\Rightarrow$ bRa (propiedad simétrica)
iii) aRb, bRc $\Rightarrow$ aRc (propiedad transitiva)

Definición:
Se llama **clase de equivalencia** de un elemento $a \in A$ al conjunto de todos los elementos de A equivalentes a a.

Observación:
El conjunto de todas las clases de equivalencia establecidas por la relación R es una partición de A (llamado conjunto cociente de A con respecto a R).

Subteorema 2 (propiedad simétrica):

H)	**T)**
$a \| b$	$b \| a$

$$a \| b \Rightarrow \begin{cases} a = b \Rightarrow \text{(por propiedad simétrica de la igualdad de conjuntos)}\ b = a \Rightarrow \text{(por definición de paralelismo)}\ b \| a \\ \quad o \\ a \cap b = \phi \Rightarrow \text{(por propiedad conmutativa de la intersección de conjuntos)}\ b \cap a = \phi \Rightarrow \text{(por definición de paralelismo)}\ b \| a \end{cases}$$

Subteorema 3 (propiedad transitiva):

H)	**T)**
$a \| b$ $b \| c$	$a \| c$

$$a \| b \Rightarrow \begin{cases} a = b \ \ (1) \\ \quad o \\ a \cap b = \phi \ \ (2) \end{cases}$$

$$b \| c \Rightarrow \begin{cases} b = c \ \ (3) \\ \quad o \\ b \cap c = \phi \ \ (4) \end{cases}$$

si (1) y (3):

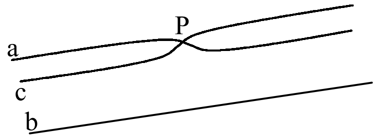
$$\left.\begin{matrix} a = b \\ b = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{(por propiedad transitiva de la igualdad de conjuntos)}\ a = c \Rightarrow \text{(por definición de paralelismo)}\ a \| c$$

si (1) y (4):

$$\left.\begin{matrix} a = b \\ b \cap c = \phi \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cap c = \phi \Rightarrow \text{(por definición de paralelismo)}\ a \| c$$

si (2) y (3):

$$\left.\begin{matrix} a \cap b = \phi \\ b = c \end{matrix}\right\} \Rightarrow a \cap c = \phi \Rightarrow \text{(por definición de paralelismo)}\ a \| c$$



si (2) y (4):

$a \cap b = \phi$

$b \cap c = \phi$

razonando por el absurdo,

supongamos que a no es paralela a c $\Rightarrow \begin{cases} \exists\, P \in a \cap c \\ \quad y \\ a \neq c \end{cases}$

$\Rightarrow$ por P pasan a y c, dos rectas paralelas a b $\Big\}$ (contradice el axioma v)

Conclusión:

El paralelismo es una relación de equivalencia, por cumplir las propiedades idéntica, simétrica y transitiva.

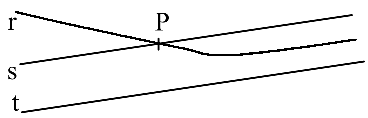
41. Definición (dirección en el plano):

Se llama **dirección** a cada una de las clases de equivalencia establecidas por el paralelismo en el conjunto de las rectas del plano.

42. Teorema:

Si una recta corta a otra, corta a todas sus paralelas.

H)	**T)**
$r \cap s = \{P\}$ $t \| s$	$\exists\, Q$ tal que $r \cap t = \{Q\}$



si $t = s \Rightarrow Q = P$

si $t \neq s$, supongamos que no existe Q en las condiciones de la tesis $\Rightarrow r \| t$

por hipótesis: $\begin{cases} s \| t \\ P \in r,\ P \in t \end{cases}$ contradice el axioma v

Capítulo 2

Ahora corresponde introducir uno de los conceptos básicos: la **igualdad geométrica**. De acuerdo a la definición de figura como conjunto de puntos, dos figuras son iguales si tienen los mismos puntos. Por lo tanto, la igualdad se reduce a la identidad o igualdad de conjuntos. Sin embargo, es mucho más amplia la idea intuitiva de igualdad de figuras. Para formalizarla, es necesario introducir el concepto de **movimiento geométrico** que, a diferencia del movimiento en la Física, sólo comprende la "posición inicial" y la "posición final", sin tomar en cuenta "trayectoria", "velocidad", etc. La idea es, entonces, considerar figuras geométricamente iguales, aquellas que se correspondan en un movimiento.

En este capítulo encontraremos:
Axioma de movimientos
Definiciones: igualdad geométrica, metafigura, desigualdades geométricas, puntos y figuras unidas en un movimiento, figuras dobles en un movimiento, clasificación de movimientos, sentido en el plano, suma de segmentos y de ángulos, múltiplos y submúltiplos de un segmento, círculo, circunferencias y definiciones relacionadas, movimientos involutivos, punto medio de un segmento.
Teoremas: teoremas de transporte del segmento y del ángulo, triángulos isósceles e isoángulos, primeros criterios de igualdad de triángulos, movimientos con puntos unidos, existencia y unicidad del punto medio de todo segmento.

43. Axioma VI (Movimientos):

Existe un conjunto $\mathcal{M}$ de biyecciones del plano en el plano cuyos elementos llamaremos movimientos, que cumplen las siguientes propiedades:

vi.1. Los movimientos conservan la alineación y la relación de estar entre (en la recta).
vi.2. Ningún movimiento transforma un segmento o un ángulo reglado en una de sus partes propias.
vi.3. La estructura $\{\mathcal{M}, \circ\}$ es un grupo.[3]
vi.4. Dadas dos semirrectas ($\overleftarrow{Ar}$ y $\overleftarrow{Bs}$), y dos semiplanos (α y β) que las tienen respectivamente como bordes, existe un único movimiento m tal que $m(\overleftarrow{Ar}) = \overleftarrow{Bs}$ y $m(\alpha) = \beta$.

[3] Definición:
Una **operación** en un conjunto A es una función de A×A en A.

Observación:
Esto implica que para todo par de elementos de A, la operación tiene resultado en A, y ese resultado es único (por ejemplo: la sustracción no es una operación en el conjunto de los números naturales.)

Definición:
Una **estructura** es un conjunto formado por uno o varios conjuntos, una o varias operaciones en los conjuntos o entre los conjuntos, y una o varias relaciones entre los elementos de cada conjunto. Eventualmente, la estructura puede carecer de relaciones o de operaciones.

Definición:
Un **grupo** es una estructura formada por un conjunto A y una operación * en ese conjunto, que cumple las siguientes propiedades:
i) $x*(y*z) = (x*y)*z$ para todos x, y, z pertenecientes a A (propiedad asociativa).
ii) $\exists\, n \in A$ tal que $x*n = n*x = x$ para todo $x \in A$ (existencia del neutro o módulo).
iii) Para todo $x \in A$, $\exists\, x' \in A$ tal que $x*x' = x'*x = n$ (existencia del recíproco).

Resolución de ecuaciones en el grupo {A,*}:
Sea $a*x = b$, con a, b, x pertenecientes a A. Se trata de hallar x en función de a y b.
$a*x = b \Rightarrow_{\text{(por ser * una función)}} a'*(a*x) = a'*b \Rightarrow_{\text{(propiedad asociativa)}} (a'*a)*x = a'*b \Rightarrow_{\text{(recíproco)}} n*x = a'*b \Rightarrow_{\text{(neutro)}} x = a'*b$.
Entonces, $a*x = b \Rightarrow x = a'*b$.
Análogamente, se demuestra lo siguiente:
$x*a = b \Rightarrow x = b*a'$.
$a*x*b = c \Rightarrow x = a'*c*b'$.
$a*b*x = c \Rightarrow x = b'*a'*c$.
$x*a*b = c \Rightarrow x = c*b'*a'$.
Note la importancia de mantener el orden de los operandos al "despejar", ya que la propiedad conmutativa no necesariamente se cumple en un grupo.

44. Nota:
El neutro del grupo de los movimientos será I tal que I(P) = P, $\forall$ P$\in\pi$. Obsérvese que I es la función identidad en π, y por lo tanto cumple la definición de neutro de la composición. Al recíproco de cada movimiento m lo llamaremos **inverso** de m, y lo notaremos m^{-1}.

45. Definición (igualdad geométrica):
Dos figuras F y G son **iguales geométricamente** (notaremos $F \underset{g}{=} G$) si y sólo si existe m, movimiento del plano, tal que $m(F) = G$.[4]

46. Teorema:
La igualdad geométrica es una relación de equivalencia en el conjunto de las figuras del plano.

Subteorema 1 (propiedad idéntica):

$$\left.\begin{array}{l}\text{Por axioma vi.3: I} \in \mathcal{M}.\\ \text{Por definición de I: I}(F) = F\end{array}\right\} \Rightarrow_{(\text{definición de } \underset{g}{=})} F \underset{g}{=} F.$$

Subteorema 2 (propiedad simétrica):

H) $F \underset{g}{=} G$

T) $G \underset{g}{=} F$

$$\left.\begin{array}{l}F \underset{g}{=} G \Rightarrow_{(\text{definición de } \underset{g}{=})} \exists\, m / m(F) = G\\ \text{Axioma vi.3: } \forall\, m \in \mathcal{M},\ \exists\, m^{-1} \in \mathcal{M}\end{array}\right\} \Rightarrow m^{-1}[m(F)] = m^{-1}(G) \Rightarrow_{(\text{propiedad recíproca de } ^{o})} \mathrm{I}(F) = m^{-1}(G) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{(\text{neutro de } ^{o})} m^{-1}(G) = F \Rightarrow_{(\text{definición de } \underset{g}{=})} G \underset{g}{=} F$$

Subteorema 3 (propiedad transitiva):

H) $F \underset{g}{=} G$, $G \underset{g}{=} H$

T) $F \underset{g}{=} H$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}F \underset{g}{=} G \Rightarrow_{(\text{definición } \underset{g}{=})} \exists\, m_1 \in \mathcal{M}\ /\ m_1(F) = G\\ G \underset{g}{=} H \Rightarrow_{(\text{definición } \underset{g}{=})} \exists\, m_2 \in \mathcal{M}\ /\ m_2(G) = H\end{array}\right\} \Rightarrow m_2[m_1(F)] = H \Rightarrow_{(\text{definición } ^{o} \text{ de funciones})} m_2{}^{o}m_1(F) = H\\ \text{Por axioma vi.3: } m_2{}^{o}m_1 \in \mathcal{M}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow_{(\text{definición } \underset{g}{=})} F \underset{g}{=} H$$

Conclusión:
La igualdad geométrica es una relación de equivalencia, por cumplir las propiedades idéntica, simétrica y transitiva.

47. Definición (metafigura):
Se llama **metafigura** de la figura F (la notaremos $[F]$) a la clase de equivalencia de F con respecto a la igualdad geométrica.

48. Definición (desigualdad geométrica):
Un segmento $\overline{AB}$ es **menor geométricamente** que un segmento $\overline{CD}$ (notaremos $\overline{AB} \underset{g}{<} \overline{CD}$) si y sólo si existe un movimiento m tal que $m(\overline{AB}) \subset \overline{CD}$. $\overline{AB}$ es **mayor geométricamente** que $\overline{AC}$ (notaremos $\overline{AB} \underset{g}{>} \overline{CD}$) si y sólo si $\overline{CD} \underset{g}{<} \overline{AB}$.

49. Observación:
Si $\overline{AB} \underset{g}{<} \overline{CD}$, entonces $\overline{AB} \underset{g}{\neq} \overline{CD}$.

50. Nota:
Análogamente se define la desigualdad geométrica para ángulos reglados.

[4] Observación:
Dado un conjunto C incluido en el dominio de una función f, se llama f(C) al conjunto de las imágenes de los elementos de C, según f.

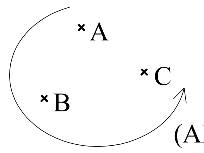
51. Definiciones:
Un punto P es **unido** en un movimiento *m* si y sólo si $m(P) = P$.
Una figura F es **unida** en un movimiento *m* si y sólo si todos sus puntos son unidos en *m*.
Una figura F es **doble** en un movimiento *m* si y sólo si $m(F) = F$.

52. Observación:
Toda figura unida es doble, pero las figuras dobles pueden no ser unidas.

53. Definiciones (movimientos parciales y totales):
Se llama **movimiento parcial** al movimiento que tiene puntos unidos y **movimiento total** al que no tiene puntos unidos.

54. Definiciones (movimientos de simple determinación y de doble determinación):
Un movimiento es de **simple determinación** si y sólo si dados un punto no unido y su correspondiente, el movimiento queda determinado.[5]
Un punto es de **doble determinación** si y sólo si dados dos puntos distintos y sus respectivos correspondientes, el movimiento queda determinado.

55. Observación (sentido en el plano):
El tratamiento riguroso de este tema requiere el uso de conceptos fuera del nivel de este curso. Por lo tanto, recurriremos a las ideas intuitivas al respecto. Dados tres puntos no alineados, existen dos sentidos diferentes (opuestos entre sí) en los cuales pueden ser ordenados: horario (o negativo) o antihorario (o positivo). Por lo tanto, toda terna ordenada de puntos no alineados está orientada en uno de esos dos sentidos.



(ABC antihorario)

56. Definiciones (movimientos directos e indirectos):
Un movimiento es **directo** si y sólo si no cambia el sentido de las ternas ordenadas de puntos no alineados. En caso contrario, el movimiento es **indirecto**. El conjunto de los movimientos directos se llamará **clase de los movimientos directos**. Análogamente se define la **clase de los movimientos indirectos**.

57. Observación:
El axioma vi.4 es equivalente a la siguiente proposición:
Dadas dos semirrectas ($\overline{Ar}$ y $\overline{Bs}$), existe un único movimiento *m* de cada clase, tales que $m(\overline{Ar}) = \overline{Bs}$ (corolario 63).

58. Observación:
Si *m* es directo y $m(\overline{Ar}) = \overline{Ar}$, entonces *m* es la identidad.

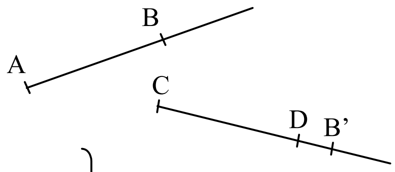
59. Observación:
La composición de movimientos directos es un movimiento directo. La composición de dos movimientos indirectos es un movimiento directo. La composición de un movimiento indirecto con uno directo es un movimiento indirecto. Por lo tanto, $m^2 = m \circ m$ es un movimiento directo, para todo movimiento *m*.

[5] Nota:
Al decir “queda determinado” debe entenderse que existe un único movimiento que cumple esas condiciones.

60. Teorema (Transporte del segmento):

H)
$\overline{AB} \equiv_g \overline{CD}$
$m(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$

T)
$m(B) = D$



Sea B' tal que $m(B) = B'$
por hipótesis: $m(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$
$\Rightarrow B' \in \overrightarrow{CD}$

$m(A) = C$
$m(B) = B'$
$\Rightarrow m(\overline{AB}) = \overline{CB'} \Rightarrow \overline{AB} \equiv_g \overline{CB'}$
por hipótesis: $\overline{AB} \equiv_g \overline{CD}$
$\Rightarrow$ (propiedad transitiva de $\equiv_g$) $\overline{CD} \equiv_g \overline{CB'}$
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ B' = D porque de lo contrario, un segmento sería igual geométricamente a una de sus partes propias (contra Axioma vi.2).

61. Corolario:

H)	**T)**
$\overline{AB} \equiv_g \overline{CD}$	Existen un único movimiento directo y un único movimiento indirecto tales que: $m(A) = C$ $m(B) = D$

62. Corolario (Inversión del segmento):

H)	**T)**
$A \neq B$	Existen un único movimiento directo y un único movimiento indirecto tales que: $m(A) = B$ $m(B) = A$

63. Corolario:

H)	**T)**
$\overrightarrow{Ar}$ $\overrightarrow{Bs}$	Existen un único movimiento directo y un único movimiento indirecto tales que: $m(\overrightarrow{Ar}) = \overrightarrow{Bs}$

64. Teorema (Transporte del ángulo):

H)
$\angle aOb \equiv_g \angle cPd$
$m(\overrightarrow{Oa}) = \overrightarrow{Pc}$
$m[a(\overrightarrow{Ob})] = c(\overrightarrow{Pd})$

T)
$m(\overrightarrow{Ob}) = \overrightarrow{Pd}$

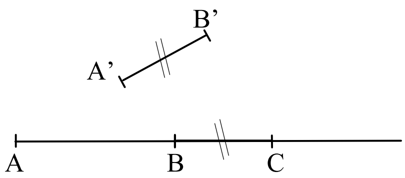
demostración similar a la del transporte del segmento.

65. Corolario (Inversión del ángulo):

H)	**T)**
$\angle aOb$	Existe un movimiento m tal que: $m(\overrightarrow{Oa}) = \overrightarrow{Ob}$ $m(\overrightarrow{Ob}) = \overrightarrow{Oa}$

66. Definición (suma de segmentos):

Dados los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$, sea C perteneciente a op($\overrightarrow{BA}$) tal que $\overline{BC} \equiv_g \overline{A'B'}$. $[\overline{AB}]+[\overline{A'B'}] = [\overline{AC}]$.



67. Definición (suma de ángulos):

Dados los ángulos $\angle rOs$ y $\angle r'O's'$, sea $\overrightarrow{Ot}$ incluida en el semiplano op[Os($\overrightarrow{Or}$)] tal que $\angle sOt \equiv_g \angle r'O's'$.
$[\angle rOs]+[\angle r'O's'] = [\angle rOt]$ (Recuérdese la observación del punto 26).

68. Observación:
Por razones de practicidad, en adelante nos referiremos a la suma de segmentos y la suma de ángulos, haciendo referencia a uno cualquiera de los elementos de la metafigura.

69. Definición (múltiplos y submúltiplos de un segmento):
Sea m un número natural y $\overline{AB}$ un segmento. Llamaremos múltiplo según m de $\overline{AB}$ (lo notaremos $m\cdot\overline{AB}$) al segmento $\overline{AB}+\overline{AB}+\overline{AB}+\ldots+\overline{AB}$ (m sumandos). Si m = 0, $m\cdot\overline{AB}$ será igual al segmento nulo.
Sea n un número natural distinto de 0 y $\overline{AB}$ un segmento. Llamaremos $\frac{1}{n}\cdot\overline{AB}$ al segmento s tal que $\overline{AB} \underset{g}{=} n\cdot s$.
Llamaremos $\frac{m}{n}\cdot\overline{AB}$ al segmento $m\cdot(\frac{1}{n}\cdot\overline{AB})$

70. Nota:
Corresponde demostrar la existencia y la unicidad de la metafigura definida como múltiplo o submúltiplo de un segmento. Aceptaremos esto sin demostración, para no cargar excesivamente el desarrollo del curso.

71. Definiciones (círculo, circunferencia):
Dados un punto O y un segmento r, llamaremos **circunferencia** de centro O y radio r (lo notaremos $\mathscr{C}_{O,r}$) al conjunto $\mathscr{C}_{O,r} = \{P \in \pi \,/\, \overline{PO} \underset{g}{=} r\}$. Llamaremos **círculo** de centro O y radio r al conjunto $\{P \in \pi \,/\, \overline{PO} \underset{g}{<} r$ o $\overline{PO} \underset{g}{=} r\}$. A los puntos P que cumplen que $\overline{PO} \underset{g}{<} r$, les llamaremos **puntos interiores** del círculo y a los que cumplen que $\overline{PO} \underset{g}{>} r$, les llamaremos **puntos exteriores** del círculo.

72. Observación:
El centro de un círculo es un punto interior del mismo.

73. Teorema:
Toda recta que pasa por el centro de una circunferencia, corta a la misma en dos puntos.

Se demuestra considerando las dos semirrectas de origen en el centro de la circunferencia y aplicando el teorema de transporte del segmento.

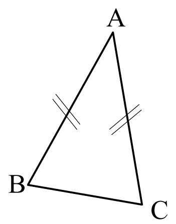
74. Definiciones:
Dada una circunferencia $\mathscr{C}_{O,r}$, llamaremos **radio** a todo segmento que tenga un extremo en el centro y otro extremo en la circunferencia; llamaremos **cuerda** a todo segmento cuyos extremos pertenezcan a la circunferencia; llamaremos **diámetro** a toda cuerda que pase por el centro; llamaremos **ángulo al centro** a todo ángulo cuyo vértice sea el centro de la circunferencia; llamaremos **arco** a la intersección de un ángulo al centro con la circunferencia y llamaremos extremos del arco a las intersecciones de los lados del ángulo con la circunferencia.

75. Teorema:
Todo triángulo isósceles es isoángulo.

H)
ABC triángulo tal que $\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{AC}$

T)
$\angle ABC \underset{g}{=} \angle ACB$

Sea *m* el movimiento que invierte el ángulo $\angle BAC \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} m(\overline{AB}) = \overline{AC} \\ m(\overline{AC}) = \overline{AB} \end{array}\right. \\ \text{por hipótesis } \overline{AB} \underset{g}{=} \overline{AC} \end{array}\right\} \Rightarrow$



$\Rightarrow_{\text{(transporte de segmento)}} \left.\begin{array}{r} m(B) = C \text{ y } m(C) = B \\ m(A) = A \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ABC \underset{g}{=} \angle ACB$

76. Teorema:
Todo triángulo isoángulo es isósceles.

H)
ABC triángulo tal que $\angle ABC \underset{g}{=} \angle ACB$

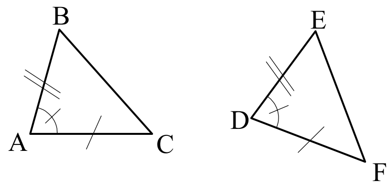
T)
$\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{AC}$

Demostración similar a la anterior.

77. Teorema (1er Criterio de igualdad de triángulos):

H)
$\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{DE}$
$\overline{AC} \underset{g}{=} \overline{DF}$
$\angle BAC \underset{g}{=} \angle EDF$

T)
$ABC \underset{g}{=} DEF$



por hipótesis: $\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{DE} \Rightarrow$ (definición $\underset{g}{=}$) $\exists\ m/m(\overline{AB}) = \overline{DE}$

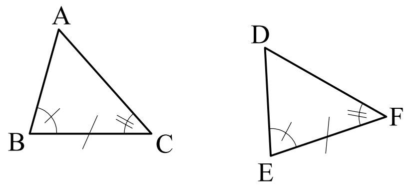
$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Sea } m/m[AB(C)] = DE(F) \\ \angle BAC \underset{g}{=} \angle EDF\end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(transporte del ángulo)}} m(\overline{AC}) = \overline{DF} \\ \text{por hipótesis: } \overline{AC} \underset{g}{=} \overline{DF}\end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(transporte del segmento)}} m(C) = F$$

$$\left.\begin{array}{l}m(A) = D \\ m(B) = E \\ m(C) = F\end{array}\right\} \Rightarrow m(ABC) = DEF \Rightarrow ABC \underset{g}{=} DEF$$

78. Teorema (2do Criterio de igualdad de triángulos):

H)
$\angle ABC \underset{g}{=} \angle DEF$
$\overline{BC} \underset{g}{=} \overline{EF}$
$\angle BCA \underset{g}{=} \angle EFD$

T)
$ABC \underset{g}{=} DEF$



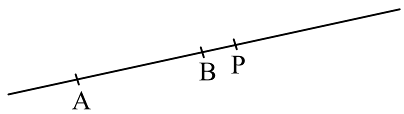
Demostración similar a la anterior.

79. Teorema:

Una recta con dos puntos unidos es unida.

H)
$m(A) = A$
$m(B) = B$
$A \neq B$

T)
AB es unida



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}m(A) = A \\ m(B) = B\end{array}\right\} \Rightarrow m(\overline{AB}) = \overline{AB} \\ \text{Sea P tal que } P \in \overline{AB}\end{array}\right\} \Rightarrow m(\overline{AP}) = \overline{AP} \\ \overline{AP} \underset{g}{=} \overline{AP} \text{ (propiedad idéntica de la } \underset{g}{=}\text{)}\end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(transporte de segmento)}} m(P) = P$$

Análogamente si $P \in op(\overline{AB})$.

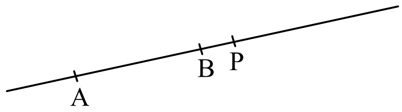
$\therefore m(P) = P,\ \forall\ P \in AB$

80. Teorema:

Si un movimiento directo tiene dos puntos distintos unidos, es la identidad.

H)	**T)**
$m(A) = A$ $m(B) = B$ m directo	$m = I$

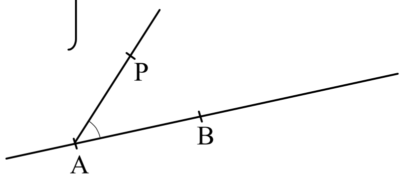
Si $P \in AB \Rightarrow$ (teorema 79) $m(P) = P$



Si $P \notin AB$:

$$\left.\begin{array}{l} m(\overline{AB}) = \overline{AB} \\ m[AB(P)] = AB(P) \text{ (por ser } m \text{ directo)} \\ \angle BAP \underset{g}{=} \angle BAP \text{ (propiedad idéntica de la } \underset{g}{=}) \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(transporte de ángulo)}} m(\overline{AP}) = \overline{AP}$$

$$\left.\begin{array}{l} m(\overline{AP}) = \overline{AP} \\ \overline{AP} \underset{g}{=} \overline{AP} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(transporte de segmento)}} m(P) = P$$



$\therefore m(P) = P, \ \forall P \in \pi$

81. Definición (movimiento involutivo):

Un movimiento m es **involutivo** si y sólo si $m^{o}m = I$ (si y sólo si $m = m^{-1}$).

82. Teorema:

Si un movimiento invierte un segmento, es involutivo.

H)	**T)**
$m(A) = B$ $m(B) = A$ $A \neq B$	m involutivo.

$$\left.\begin{array}{l} (m^{o}m)(A) = m[m(A)] = m(B) = A \\ (m^{o}m)(B) = m[m(B)] = m(A) = B \\ (m^{o}m) \text{ directo} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(teorema 80)}} (m^{o}m) = I$$

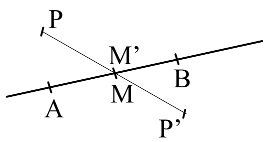
83. Definición (punto medio):

M es **punto medio** de $\overline{AB}$ si y sólo si $M \in \overline{AB}$ y $\overline{MA} \underset{g}{=} \overline{MB}$.

84. Teorema (Existencia y unicidad del punto medio de todo segmento):

El punto medio de todo segmento existe y es único.

H)	**T)**
$\overline{AB}$	$\exists!$ M, punto medio de $\overline{AB}$



Existencia:

Sea m directo, que invierte a $\overline{AB} \Rightarrow$ (teorema 82) m involutivo

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } P \notin AB \\ \text{Sea } P' = m(P) \\ m \text{ directo} \end{array}\right\} \Rightarrow P' \in op[AB(P)] \Rightarrow_{\text{(axioma de división del plano)}} \exists\, M / AB \cap \overline{PP'} = \{M\}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } M' = m(M) \\ m \text{ es involutivo y } m(P) = P' \Rightarrow m(P') = P \Rightarrow m(\overline{PP'}) = \overline{PP'} \\ M \in \overline{PP'} \end{array}\right\} \Rightarrow M' \in \overline{PP'}$$

$$\left.\begin{array}{l} m \text{ invierte a } \overline{AB} \Rightarrow m(\overline{AB}) = \overline{AB} \\ M \in AB \\ m(M) = M' \end{array}\right\} \Rightarrow M' \in AB$$

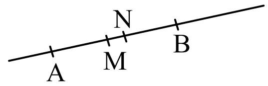
$$\left.\begin{array}{l} M' \in \overline{PP'} \\ M' \in AB \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{PP'} \cap AB = \{M'\}$$

$$\left.\begin{array}{l} AB \cap \overline{PP'} = \{M\} \\ \overline{PP'} \cap AB = \{M'\} \end{array}\right\} \Rightarrow M = M'$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow m(M) = M \\ m(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow m(\overline{AM}) = \overline{BM} \Rightarrow_{\text{(definición de punto medio)}} M \text{ es punto medio de } \overline{AB}$$

Unicidad:

Supongamos que existe $N \neq M$ tal que N es punto medio de $\overline{AB}$.
Supongamos $A \prec M \prec N \prec B \Rightarrow \overline{AM} \underset{g}{\lessdot} \overline{AN} \underset{g}{=} \overline{NB} \underset{g}{\lessdot} \overline{MB} \Rightarrow \overline{AM} \underset{g}{\lessdot} \overline{MB} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ M no es punto medio de $\overline{AB}$ (contradice la hipótesis).



Análogamente se demuestra si $A \prec N \prec M \prec B$.

85. Observación:

De la demostración anterior se desprende que el punto medio de un segmento es unido en el movimiento directo que lo invierte.

86. Observación:

El centro de una circunferencia es punto medio de todo diámetro de la misma.

Capítulo 3

En este capítulo encontraremos:
Definiciones: simetría central; ángulos opuestos por el vértice; ángulos entre paralelas; paralelogramo; mediana de un triángulo; baricentro.
Propiedades de la simetría central; teoremas de ángulos entre paralelas, suma de ángulos en un triángulo, desigualdades en el triángulo; propiedades de los paralelogramos; paralela media; propiedades del baricentro.

87. Definición (simetría central):
Dada una semirrecta $\overline{Or}$, se llama **simetría central** de centro O (lo notaremos C_O) al movimiento directo tal que $C_O(\overline{Or}) = op(\overline{Or})$.

88. Observación:
Tal movimiento existe y es único para toda semirrecta $\overline{Or}$ por un corolario del teorema de transporte del segmento (ver corolario 63).

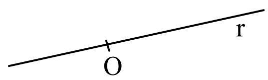
89. Observación:
Por ser C_O un movimiento directo, a cada uno de los semiplanos de borde r, le corresponde el semiplano opuesto.

90. Propiedad:
$C_O[op(\overline{Or})] = \overline{Or}$
Esto se demuestra aplicando el axioma vi.1: Los movimientos conservan la alineación y la relación de estar entre (en la recta).

91. Propiedad:
O es el único punto unido en C_O.

Sea P un punto y $C_O(P) = P'$. Sea $\overline{Or}$ la semirrecta utilizada en la definición de C_O.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } P \notin r \Rightarrow_{\text{(por observación 89)}} P \text{ y } P' \text{ pertenecen a semiplanos opuestos} \Rightarrow P \neq P' \\ \text{Si } P \in \overline{Or} \text{ y } P \neq O \Rightarrow_{\text{(por definición de } C_O)} P' \in op(\overline{Or}) \Rightarrow P \neq P' \\ \text{Si } P \in op(\overline{Or}) \text{ y } P \neq O \Rightarrow_{\text{(por propiedad 90)}} P' \in \overline{Or} \Rightarrow P \neq P' \\ O \text{ es unido en } C_O \text{ (por definición de } C_O) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

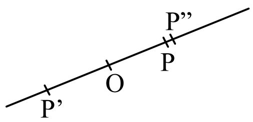


$\Rightarrow$ O es el único punto unido en C_O.

92. Teorema:
Las simetrías centrales son movimientos involutivos.

H)
$C_O(\overline{Or}) = op(\overline{Or})$

T)
C_O es involutivo



$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } P \in \overline{Or} \\ \text{Sea } P' = C_O(P) \end{array}\right\} \Rightarrow P' \in op(\overline{Or})$$

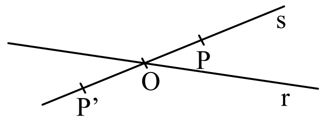
$$\left.\begin{array}{l} \text{Sea } P'' = C_O(P') \Rightarrow_{\text{(propiedad 90)}} P'' \in \overline{Or} \\ \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} C_O(O) = O \\ C_O(P) = P' \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{OP} \underset{g}{=} \overline{OP'} \\ \left.\begin{array}{l} C_O(O) = O \\ C_O(P') = P'' \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{OP'} \underset{g}{=} \overline{OP''} \end{array}\right\} \Rightarrow_{(\text{transitiva de la } \underset{g}{=})} \overline{OP} \underset{g}{=} \overline{OP''} \\ P \in \overline{Or} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(axioma vi.2: rigidez)}} P = P''$$

$$\left.\begin{array}{l} C_O(P) = P' \\ C_O(P') = P \end{array}\right\} \Rightarrow C_O \text{ invierte un segmento} \Rightarrow_{\text{(teorema 82)}} C_O \text{ es involutivo}$$

93. Teorema:
En C_O a toda semirrecta de origen O le corresponde su opuesta

H)
$C_O(\overline{Or}) = op(\overline{Or})$
$C_O(\overline{Os}) = \overline{Os'}$

T)
$\overline{Os'} = op(\overline{Os})$



$$\left.\begin{array}{l}\text{Sea } P \in \overline{Os} \\ \text{Sea } P' = C_O(P) \\ C_O(\overline{Os}) = \overline{Os'}\end{array}\right\} \Rightarrow P' \in \overline{Os'}$$

$$\left.\begin{array}{l}P' = C_O(P) \Rightarrow_{(C_O \text{ es involutivo})} C_O(P') = P \Rightarrow C_O \text{ invierte } \overline{PP'} \\ \quad\quad \text{Co directo (por definición)}\end{array}\right\} \Rightarrow_{(\text{observación 85})}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \text{el punto medio de } \overline{PP'} \text{ es unido en } C_O \\ \quad \text{O es el único punto unido en } C_O \text{ (propiedad 91)}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{O es punto medio de } \overline{PP'} \Rightarrow \overline{OP'} = op(\overline{OP}) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overline{Os'} = op(\overline{Os})$

94. Observación:
La simetría central está determinada por su centro, es decir, es independiente de la semirrecta que se considera en su definición.

95. Corolario:
Las rectas que pasan por el centro de simetría son dobles en dicha simetría. Asimismo, las circunferencias con centro en el centro de simetría son dobles en la misma.

96. Definición (ángulos opuestos por el vértice):
Dos **ángulos son opuestos por el vértice** si y sólo si los lados de uno son semirrectas opuestas de los lados del otro.

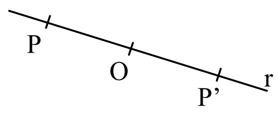
97. Corolario:
Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.

98. Propiedad:
El centro de simetría central es el punto medio de todo segmento determinado por un punto y su correspondiente. Recíprocamente, todo segmento se invierte en la simetría cuyo centro es el punto medio del mismo.

99. Propiedad:
Las rectas dobles en una simetría central pasan por el centro de simetría.

H)
$C_O(r) = r$

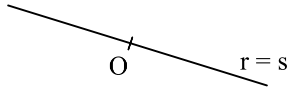
T)
$O \in r$



$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Sea } P \in r \text{, y sea } P' = C_O(P) \\ \text{Por hipótesis: } C_O(r) = r\end{array}\right\} \Rightarrow P' \in r \\ \quad\quad\quad\quad O \in PP' \text{ (propiedad 98)}\end{array}\right\} \Rightarrow O \in r$$

100. Propiedad:
Las rectas simétricas son paralelas.

H)	**T)**
$s = C_O(r)$	$s \parallel r$



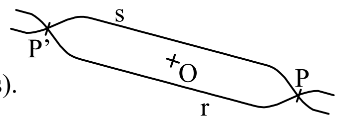
Caso 1: $O \in r$

Por corolario 95: $C_O(r) = r \Rightarrow r = s \Rightarrow$ (definición de paralelismo) $r \parallel s$

Caso 2: $O \notin r$

Negando la tesis, supongamos que r no es paralela a s $\Rightarrow \exists\, P /\ r \cap s = \{P\}$; Como $O \notin r$ $\Rightarrow P \neq O$; Sea $P' = C_O(P)$ $\Rightarrow P' \neq P$ $\Rightarrow$

Por hipótesis: $C_O(r) = s$
C_O es una transformación involutiva: $C_O(s) = r$
$r \cap s = \{P\}$
$C_O(P) = P'$
$\Rightarrow P' \in r \cap s$



$\Rightarrow$ (Axioma ii) $r = s \Rightarrow$ r es doble en $C_O \Rightarrow$ (propiedad 99) $O \in r$ (contradice la hipótesis).

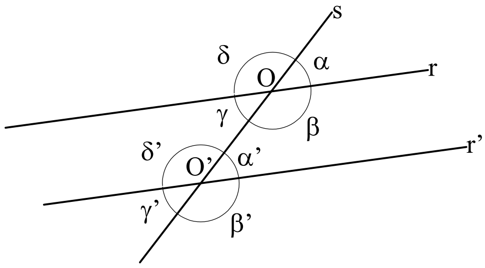
$\therefore r \parallel s$

101. Definiciones (ángulos entre paralelas):
Dadas dos rectas paralelas r y r', y otra secante s, quedan determinados los ángulos indicados en la figura.

Son ángulos **correspondientes**: α y α', β y β' , γ y γ', δ y δ'

Son ángulos **alternos internos**: β y δ', γ y α'

Son ángulos **alternos externos**: α y γ', δ y β'



102. Teorema:
Los ángulos alternos internos son iguales.
Los ángulos alternos externos son iguales.

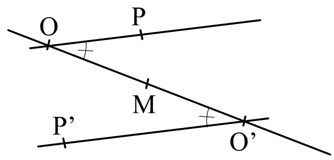
Se demuestra aplicando la simetría de centro en el punto medio de $\overline{OO'}$.

103. Teorema:
Los ángulos correspondientes son iguales.

Se demuestra aplicando el teorema 102, el corolario 97 y la propiedad transitiva de la igualdad geométrica.

104. Teorema:
Recíproco del teorema 103.

H)	**T)**
$O \neq O'$ P y P' pertenecen a distintos semiplanos de borde OO' $\angle POO' \underset{g}{=} \angle P'O'O$	$OP \parallel O'P'$



Sea M punto medio de $\overline{OO'} \Rightarrow C_M(O) = O'$; Sea $P'' = C_M(P)$ $\Rightarrow$

$P'' \in op[OO'(P)] \Rightarrow P'' \in OO'(P')$ [(*)]

$C_M(\overline{OP}) = \overline{O'P''}$; $C_M(\overline{OO'}) = \overline{O'O}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow C_M(\angle POO') = \angle P''O'O \Rightarrow \angle POO' \underset{g}{=} \angle P''O'O$
Por hipótesis: $\angle POO' \underset{g}{=} \angle P'O'O$
$\Big\} \Rightarrow$ (transitiva de la $\underset{g}{=}$) $\angle P''O'O \underset{g}{=} \angle P'O'O$

$^{(*)}$ $P'' \in OO'(P')$
$\Big\} \Rightarrow$

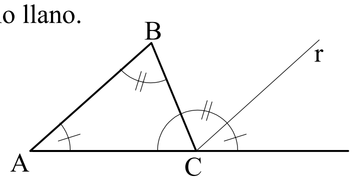
$\Rightarrow$ (Axioma vi.2) $\overline{O'P''} = \overline{O'P'} \Rightarrow C_M(\overline{OP}) = \overline{O'P'} \Rightarrow$ (propiedad 100) $OP \| O'P'$

105. Teorema:

La suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano.

H)
ABC triángulo.

T)
$\angle A+\angle B+\angle C \underset{g}{=}$ ángulo llano.



Sea $\overline{Cr}$ paralela a AB y contenida en AC(B).
Sea $\overline{Cs}$ la semirrecta opuesta a $\overline{CA}$.

$\angle sCr \underset{g}{=} \angle A$ (por correspondientes)
$\angle BCr \underset{g}{=} \angle B$ (por alternos internos)
$\angle sCr+\angle BCr+\angle C \underset{g}{=} \angle sCA \underset{g}{=}$ ángulo llano
$\Big\} \Rightarrow \angle A+\angle B+\angle C \underset{g}{=}$ ángulo llano.

106. Corolario:

Cualquier ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos internos no adyacentes, y por lo tanto, es mayor que cualquiera de ellos.

107. Observación:

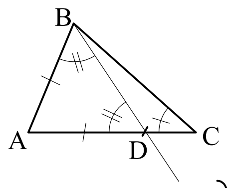
Salvando las limitaciones de la suma de ángulos que nos impone la definición que hemos tomado, se demuestra que la suma de los ángulos interiores de cualquier polígono convexo, es igual a un ángulo llano, por el número de lados menos dos.

108. Teorema:

En todo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo.

H)
ABC triángulo tal que $\overline{AC} \underset{g}{>} \overline{AB}$

T)
$\angle B \underset{g}{>} \angle C$



Sea $D \in \overline{AC}$ tal que $\overline{AD} \underset{g}{=} \overline{AB}$.
Por hipótesis, D es interior al segmento $\overline{AC} \Rightarrow \overline{BD}$ es rayo interior de $\angle B \Rightarrow \angle B \underset{g}{>} \angle ABD$

$\angle ADB$ es exterior del triángulo BCD $\Rightarrow \angle ADB \underset{g}{>} \angle C$

Por construcción, ABD es isósceles $\Rightarrow$ ABD es isoángulo $\Rightarrow \angle ADB \underset{g}{=} \angle ABD$
$\Big\} \Rightarrow \angle ABD \underset{g}{>} \angle C$
$\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle B \underset{g}{>} \angle C$

109. Teorema:

En todo triángulo, a mayor ángulo se opone mayor lado.

H)
ABC triángulo tal que $\angle B \underset{g}{>} \angle C$

T)
$\overline{AC} \underset{g}{>} \overline{AB}$

Razonando por el absurdo, supongamos que no se cumple $\overline{AC} \underset{g}{>} \overline{AB} \Rightarrow \overline{AC} \underset{g}{=} \overline{AB}$ o $\overline{AC} \underset{g}{<} \overline{AB}$

Si $\overline{AC} \underset{g}{=} \overline{AB} \Rightarrow$ ABC es isósceles $\Rightarrow$ (teorema 69) ABC isoángulo $\Rightarrow \angle B \underset{g}{=} \angle C$ (contra la hipótesis).

Si $\overline{AC} \underset{g}{<} \overline{AB} \Rightarrow$ (teorema 108) $\angle B \underset{g}{<} \angle C$ (contra la hipótesis).

110. Teorema:

En todo triángulo, cualquiera de sus lados es menor que la suma de los otros dos.

H)
ABC triángulo

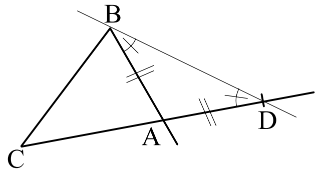
T)
$\overline{BC} \underset{g}{<} \overline{AC}+\overline{AB}$

Sea $D \in op(\overline{AC})$ tal que $\overline{AD} \underset{g}{=} \overline{AB} \Rightarrow ABD$ triángulo es isósceles $\Rightarrow$ es isoángulo $\Rightarrow \angle CDB \underset{g}{=} \angle ABD$

Como $\overline{BA}$ es rayo interior del $\angle CBD \Rightarrow \angle CBD \underset{g}{>} \angle ABD$ $\Bigg\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle CBD \underset{g}{>} \angle CDB \Rightarrow$ (teorema 109 en el triángulo BCD) $\Rightarrow \overline{CD} \underset{g}{>} \overline{CB}$

Por construcción: $\overline{CD} \underset{g}{=} \overline{AC}+\overline{AB}$ $\Bigg\} \Rightarrow \overline{BC} \underset{g}{<} \overline{AC}+\overline{AB}$



111. Definición (paralelogramo):

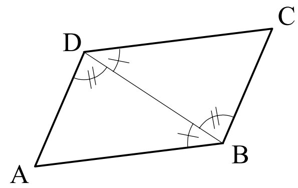
Un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si las rectas que contienen a los lados opuestos son paralelas..

112. Teorema:

En un paralelogramo, los dos pares de lados opuestos son iguales geométricamente.

H)
ABCD paralelogramo

T)
$\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{CD}$
$\overline{BC} \underset{g}{=} \overline{AD}$



Por definición, AD es paralela a BC. Considerando la secante BD,
por el teorema 102 tenemos que $\angle CDB \underset{g}{=} \angle ABD$

Análogamente, $\angle CBD \underset{g}{=} \angle ADB$
$\overline{BD}$ común

$\Bigg\} \Rightarrow$ (2[do] criterio de igualdad de triángulos) $CBD \underset{g}{=} ADB$

$\Downarrow$

$\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{CD}$
$\overline{BC} \underset{g}{=} \overline{AD}$

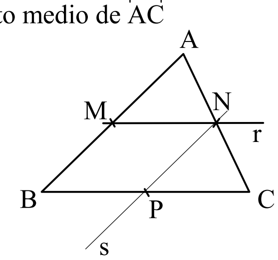
113. Observación:

Utilizando las propiedades de la simetría central, se demuestra el recíproco del teorema 112 y las siguientes propiedades: un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si un par de lados opuestos son paralelos e iguales geométricamente; un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si los puntos medios de sus diagonales son iguales; un cuadrilátero es un paralelogramo si y sólo si los ángulos opuestos son iguales geométricamente.

114. Teorema (paralela media):

H)
ABC triángulo
M punto medio de $\overline{AB}$
$r \| BC$; $M \in r$

T)
$\exists\, N \in r$ tal que N punto medio de $\overline{AC}$



Por teorema 42, $\exists\, N \in r \cap AC$.
Sea $s \| AB$ por N. Sea $s \cap BC = \{P\}$ (existe por teorema 42).

MNPB es un paralelogramo (por obsevación 113) $\Rightarrow \overline{NP} \underset{g}{=} \overline{MB}$

Por hipótesis: $\overline{MB} \underset{g}{=} \overline{MA}$ $\Bigg\} \Rightarrow \overline{NP} \underset{g}{=} \overline{MA}$

$NP \| MA$ $\Bigg\} \Rightarrow$ MANP paralelogramo $\Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} \overline{MP} \underset{g}{=} \overline{AN} \\ MP \| AN = NC \end{cases}$

Por hipótesis: $MN \| PC$ $\Bigg\} \Rightarrow$ MNCP paralelogramo $\Rightarrow \overline{MP} \underset{g}{=} \overline{NC}$

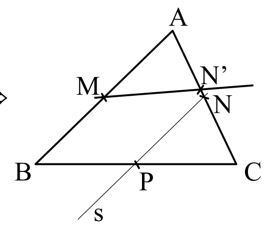
$\Bigg\} \Rightarrow \overline{AN} \underset{g}{=} \overline{NC} \Rightarrow$ N punto medio de $\overline{AC}$

115. Teorema (paralela media):

El segmento determinado por los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado, e igual a su mitad.

H)
M punto medio de $\overline{AB}$
N punto medio de $\overline{AC}$

T)
$MN \| BC$
$\overline{MN} \underset{g}{=} \frac{1}{2}\,\overline{BC}$



Sea $r \| BC$ por M, y N' tal que $r \cap AC = \{N'\}$ ⇒ (por teorema 114) N' es punto medio de $\overline{AC}$
por hipótesis: N es punto medio de $\overline{AC}$
⇒ (unicidad del punto medio) N = N' ⇒ $MN \| BC$

Sea $s \| AB$ por N, y P tal que $s \cap BC = \{P\}$ ⇒ (por teorema 114) P es punto medio de $\overline{BC}$ ⇒ $\overline{BP} \underset{g}{=} \frac{1}{2}\,\overline{BC}$
Por lo demostrado anteriormente: $MN \| BC$
Por construcción: $NP \| MB$
⇒ MNPB es paralelogramo ⇒ $\overline{MN} \underset{g}{=} \overline{BP}$
⇒ $\overline{MN} \underset{g}{=} \frac{1}{2}\,\overline{BC}$

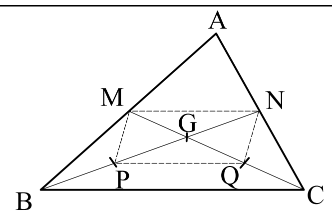
116. Definición (medianas de un triángulo):

Llamaremos **mediana** de un triángulo a cada uno de los segmentos determinados por un vértice y el punto medio del lado opuesto (en algunas ocasiones, por razones de comodidad, llamaremos mediana a la recta que contiene al segmento; el contexto permitirá distinguir cuándo se trata del segmento y cuándo de la recta).

117. Teorema:

H)
ABC triángulo
M punto medio de $\overline{AB}$
N punto medio de $\overline{AC}$
$BN \cap CM = \{G\}$

T)
$\overline{GN} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\,\overline{BN}$
$\overline{GM} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\,\overline{CM}$



Sea P punto medio de $\overline{BG}$ y Q punto medio de $\overline{CG}$ ⇒ (teorema 115 en BGC) $\overline{PQ} \underset{g}{=} \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ y $PQ \| BC$
$\overline{MN} \underset{g}{=} \frac{1}{2}\,\overline{BC}$ (teorema 115 en ABC) y $MN \| BC$
⇒

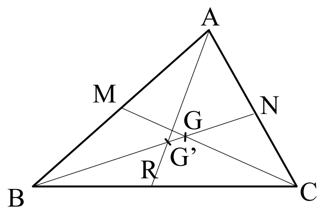
⇒ (definición) MNQP es paralelogramo
Por hipótesis: $MQ \cap NP = \{G\}$
⇒ (observación 113) $\overline{GN} \underset{g}{=} \overline{GP}$ y $\overline{GM} \underset{g}{=} \overline{GQ}$
Por construcción: P punto medio de $\overline{BG}$ y Q punto medio de $\overline{CG}$
⇒ $\overline{CQ} \underset{g}{=} \overline{QG} \underset{g}{=} \overline{GM}$ y
$\overline{BP} \underset{g}{=} \overline{PG} \underset{g}{=} \overline{GN}$
⇓
$\overline{GN} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\,\overline{BN}$ y
$\overline{GM} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\,\overline{CM}$

118. Corolario:

Las medianas de un triángulo son concurrentes.

H)
ABC triángulo
M punto medio de $\overline{AB}$
N punto medio de $\overline{AC}$
R punto medio de $\overline{BC}$
$BN \cap CM = \{G\}$ $\quad BN \cap AR = \{G'\}$

T)
$G = G'$
$\overline{GR} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\overline{AR}$



Aplicando el teorema 117: $\left\{\begin{array}{l} \overline{G'N} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\overline{BN} \\ \overline{GN} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\overline{BN} \\ \overline{GR} \underset{g}{=} \frac{1}{3}\overline{AR} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(nota 70)}} G = G'$

119. Definición (baricentro):

Llamaremos **baricentro** de un triángulo al punto de intersección de sus medianas.

Capítulo 4

En este capítulo encontraremos:
Definiciones: simetría axial; perpendicularidad; ángulos rectos; agudos y obtusos; mediatriz; circuncentro y circunferencia circunscripta a un triángulo; proyección ortogonal; distancia de un punto a una recta; tangente a una circunferencia; alturas de un triángulo; ortocentro de un triángulo; bisectriz de un ángulo; incentro y exincentros de un triángulo.
Propiedades de la simetría axial; teoremas de perpendicularidad (existencias y unicidades); igualdad geométrica de los ángulos rectos; propiedades de las mediatrices; propiedades de las alturas de un triángulo. Criterios de igualdad de triángulos (3^{er} y 4^{to} criterios); existencia y unicidad de la bisectriz; propiedades de las bisectrices. Teorema de los triángulos incongruentes.

120. Definición (simetría axial):
Dada una semirrecta $\overrightarrow{Ar}$, se llama **simetría axial** de eje r (lo notaremos S_r) al movimiento indirecto tal que $S_r(\overrightarrow{Ar}) = \overrightarrow{Ar}$.

121. Propiedades:
El eje de simetría es unido.
Cada semiplano de borde r se transforma en su opuesto (por ser la simetría axial un movimiento indirecto y ser el eje unido).
La simetría axial es un movimiento involutivo.

122. Definiciones (perpendicularidad, ángulo recto):
Dos rectas a y b secantes son **perpendiculares** (lo notaremos $a\perp b$) si y sólo si determinan ángulos adyacentes iguales. A cada uno de esos ángulos lo llamaremos **ángulo recto**.

123. Definición (triángulos rectángulos):
Un triángulo es **rectángulo** si y sólo si uno de sus ángulos es recto. En este caso, el lado que se opone al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos, **catetos**.

124. Propiedad:
La relación de perpendicularidad entre rectas cumple la propiedad simétrica, es decir que dadas dos rectas a y b, si $a\perp b$ entonces $b\perp a$.

125. Propiedad:
La composición de dos simetrías axiales de ejes perpendiculares es una simetría central cuyo centro es la intersección de los dos ejes.

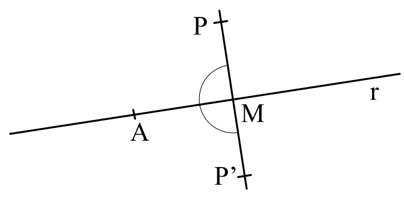
126. Definiciones (ángulos agudos y ángulos obtusos):
Los ángulos menores que un ángulo recto se llamarán **agudos** y los ángulos convexos mayores que un ángulo recto se llamarán **obtusos**.

127. Definiciónes (triángulos acutángulos y obtusángulos):
Un triángulo es **obtusángulo** si y sólo si uno de sus ángulos interiores es obtuso.
Un triángulo es **acutángulo** si y sólo si sus tres ángulos interiores son agudos.

128. Teorema:
Las rectas determinadas por un punto que no pertenece al eje y su correspondiente, son perpendiculares al eje.

H)
$P \notin r$
$S_r(P) = P'$

T)
$PP' \perp r$



Sea M tal que $PP' \cap r = \{M\}$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\text{Como } M \in r \Rightarrow S_r(M) = M\\ S_r(P) = P'\end{array}\right\} \Rightarrow S_r(\overrightarrow{MP}) = \overrightarrow{MP'} \\ \\ \text{Sea } A \in r,\ A \neq M \\ \text{Como } A \in r \Rightarrow S_r(A) = A \Rightarrow S_r(\overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MA}\end{array}\right\} \Rightarrow S_r(\angle AMP) = \angle AMP' \Rightarrow PP' \perp r$$

129. Corolario (Existencia de la perpendicular a una recta por un punto exterior):

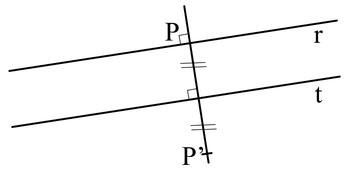
Existe la perpendicular a una recta por un punto exterior a la misma.

130. Teorema (Existencia de la perpendicular a una recta en un punto exterior):

Existe la perpendicular a una recta en un punto de la misma.

H)
$P \in r$

T)
$\exists$ s tal que $s \perp_P r$.



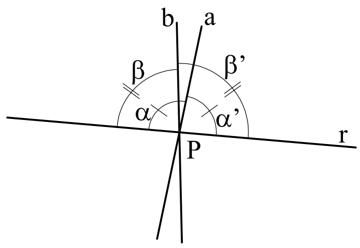
Sea $t \| r$, $t \neq r$
Sea $P' = S_t(P) \Rightarrow$ (por teorema 126) $t \perp PP'$
$\Rightarrow$ (por teorema 103) $r \perp PP'$

131. Teorema (Unicidad de la perpendicular en un punto de la recta):

La perpendicular a una recta en uno de sus puntos es única.

H)
$P \in r$
$a \perp r$ en P
$b \perp r$ en P

T)
$a = b$



Sean α y α' los ángulos determinados por a y r, en un semiplano de borde r.
Sean β y β' los ángulos determinados por b y r, en el mismo semiplano.

Supongamos que $a \neq b \Rightarrow \alpha \underset{g}{\neq} \beta$
Sin perder generalidad, tomemos $\alpha \underset{g}{\lneqq} \beta \Rightarrow \alpha' \underset{g}{\gneqq} \beta'$
$a \perp r \Rightarrow \alpha \underset{g}{=} \alpha'$
$\Rightarrow \beta \underset{g}{\gneqq} \alpha \underset{g}{=} \alpha' \underset{g}{\gneqq} \beta' \Rightarrow \beta \underset{g}{\gneqq} \beta' \Rightarrow$ b no es perpendicular a r

132. Definición (mediatriz):

Se llama **mediatriz** de un segmento a la recta perpendicular al segmento por su punto medio.

133. Notación:

Notaremos $m_{\overline{AB}}$ a la mediatriz del segmento $\overline{AB}$.

134. Corolario del teorema 131:

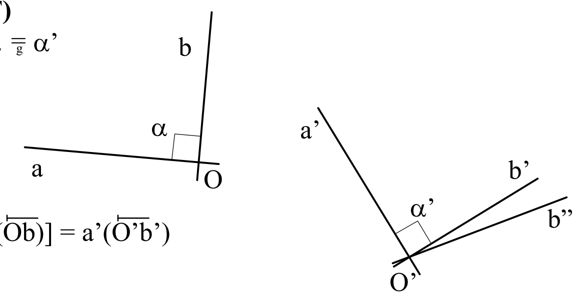
La mediatriz de un segmento existe y es única.

135. Teorema:

Los ángulos rectos son iguales geométricamente.

H)
α recto
α' recto

T)
$\alpha \underset{g}{=} \alpha'$



Sea $\alpha = \angle aOb$
Sea $\alpha' = \angle a'O'b'$

Sea m movimiento tal que $m(O) = O'$, $m(\overrightarrow{Oa}) = \overrightarrow{O'a'}$ y $m[a(\overrightarrow{Ob})] = a'(\overrightarrow{O'b'})$
Sea $m(\overrightarrow{Ob}) = \overrightarrow{O'b''}$

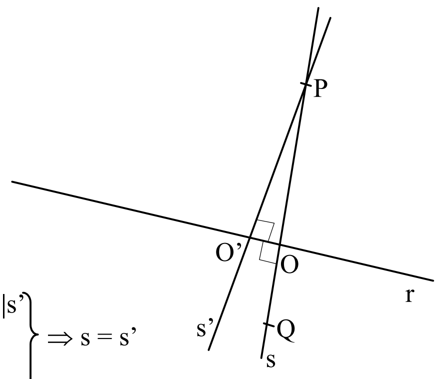
Por definición de ángulo recto: $\left\{ \begin{array}{l} a \perp_O b \Rightarrow \text{(por corresponderse en } m\text{)}\ a' \perp_{O'} b'' \\ a' \perp_{O'} b' \end{array} \right\} \Rightarrow$ (teorema 131) $b' = b'' \Rightarrow m(\alpha) = \alpha' \Rightarrow \alpha \underset{g}{=} \alpha'$

136. Teorema (Unicidad de la perpendicular por un punto exterior):

La perpendicular a una recta por un punto exterior a la misma es única:

H)
$P \notin r$
$s \perp r$ por P
$s' \perp r$ por P

T)
$s = s'$



Sean O y O' tales que $s \cap r = \{O\}$ y $s' \cap r = \{O'\}$
Sea $Q \in op(\overline{OP})$

$$\left.\begin{array}{l} s\perp r \Rightarrow \angle O'OQ \text{ recto} \\ s'\perp r \Rightarrow \angle PO'O \text{ recto} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(teorema 132)}} \angle O'OQ \underset{g}{=} \angle PO'O \Rightarrow_{\text{(teorema 104)}} s \| s'$$

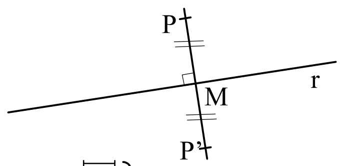
$$\left.\begin{array}{l} s \| s' \\ \text{(por hipótesis) } P \in s \cap s' \end{array}\right\} \Rightarrow s = s'$$

137. Teorema:

El eje de simetría es mediatriz de los segmentos determinados por un punto que no pertenece al eje, y su correspondiente.

H)
$P \notin r$
$S_r(P) = P'$

T)
r es mediatriz de $\overline{PP'}$



Sea M tal que $PP' \cap r = \{M\}$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Como } M \in r \Rightarrow S_r(M) = M \\ S_r(P) = P' \end{array}\right\} \Rightarrow S_r(\overline{MP}) = \overline{MP'} \Rightarrow \overline{MP} \underset{g}{=} \overline{MP'} \Rightarrow M \text{ es punto medio de } \overline{PP'}$$

$$\left.\begin{array}{l} M \text{ es punto medio de } \overline{PP'} \\ \text{Por teorema 128: } r \perp PP' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

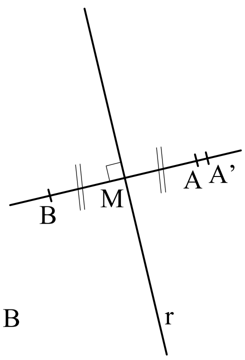
$\Rightarrow$ r es mediatriz de $\overline{PP'}$

138. Teorema:

La mediatriz es eje de simetría del segmento (recíproco del teorema 137).

H)
$r = m_{\overline{AB}}$

T)
$S_r(A) = B$



Sea M punto medio de $\overline{AB}$. $M \in r$ (por definición de mediatriz).

$$\left.\begin{array}{l} r = m_{\overline{AB}} \Rightarrow_{\text{(definición de mediatriz)}} r \perp AB \\ \text{Sea } A' = S_r(A) \Rightarrow_{\text{(teorema 126)}} r \perp AA' \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(teorema 136)}} AB = AA'$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AM} \underset{g}{=} \overline{MB} \text{ (M punto medio de } \overline{AB}) \\ \overline{AM} \underset{g}{=} \overline{MA'} \text{ (simétricos respecto a r)} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(transitiva de la } \underset{g}{=})} \overline{MB} \underset{g}{=} \overline{MA'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{MB} \underset{g}{=} \overline{MA'} \\ B, A' \in op(\overline{MA}) \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(rigidez)}} A' = B$$

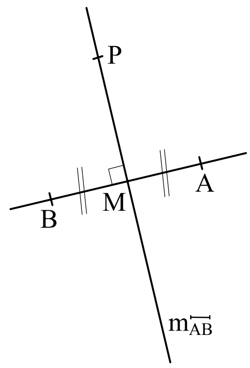
139. Teorema:

La mediatriz es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los extremos del segmento.

Subteorema 1:

H)
$\overline{PA} \underset{g}{=} \overline{PB}$

T)
$P \in m_{\overline{AB}}$



Si P es punto medio de $\overline{AB} \Rightarrow_{\text{(por definición de mediatriz)}} P \in m_{\overline{AB}}$

Si P no es punto medio de $\overline{AB}$, sea M dicho punto medio.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{MA} \underset{g}{=} \overline{MB} \\ \overline{PA} \underset{g}{=} \overline{PB} \text{ (por hipótesis)} \\ \overline{PM} \text{ común} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(3er criterio de igualdad de triángulos)}} AMP \underset{g}{=} BMP \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle AMP \underset{g}{=} \angle BMP \underset{g}{=}$ ángulo recto (por definición de ángulo recto) $\Rightarrow PM \perp AB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (definición de mediatriz) PM es mediatriz de $\overline{AB}$

Subteorema 2:

H)
$P \in m_{\overline{AB}}$

T)
$\overline{PA} \underset{g}{=} \overline{PB}$

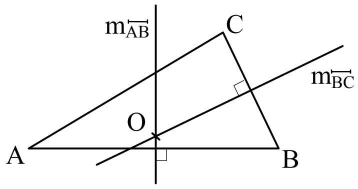
$$\left.\begin{array}{l} \overline{MA} \underset{g}{=} \overline{MB} \\ \overline{PM} \text{ común} \\ \angle AMP \underset{g}{=} \angle BMP \underset{g}{=} \text{ángulo recto} \end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(1er criterio de igualdad de triángulos)}} AMP \underset{g}{=} BMP \Rightarrow \overline{PA} \underset{g}{=} \overline{PB}$$

140. Observación:
La mediatriz de toda cuerda pasa por el centro de la circunferencia.

141. Teorema:
Las mediatrices de los lados de un triángulo son concurrentes.

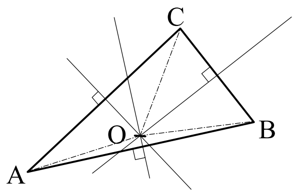
H)
ABC triángulo
$m_{\overline{AB}} \cap m_{\overline{BC}} = \{O\}$

T)
$O \in m_{\overline{AC}}$



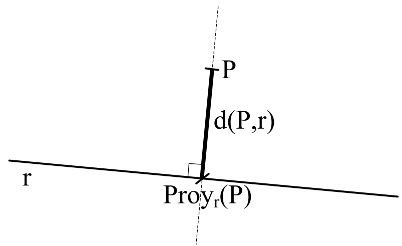
Se demuestra aplicando el teorema 139.

142. Definición (circuncentro):
Llamaremos **circuncentro** de un triángulo al punto de intersección de las mediatrices de sus lados.



143. Propiedad:
El circuncentro equidista de los vértices del triángulo. Además, es el único punto del plano que cumple esta propiedad. En consecuencia, es centro de una circunferencia que pasa por éstos. Llamaremos **circunferencia circunscripta** a dicha circunferencia.

144. Corolario:
Por tres puntos no alineados pasa una única circunferencia.



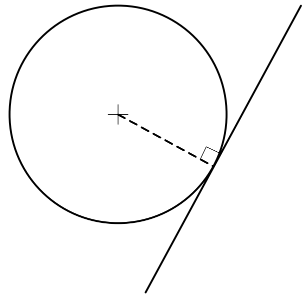
145. Definición (proyección ortogonal):
Se llama **proyección ortogonal** del punto P sobre la recta r al punto de la intersección de r con la perpendicular a r por P.

146. Definición (distancia de un punto a una recta):
Se llama **distancia** del punto P a la recta r al segmento cuyos extremos son P y la proyección ortogonal de P sobre r. Lo notaremos d(P,r).

147. Observación:
En virtud de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a un ángulo llano, en un triángulo rectángulo el recto es el mayor de los ángulos, y como a mayor ángulo se opone mayor lado, la hipotenusa es mayor que cualquiera de los catetos.

148. Observación:
La distancia del punto P a la recta r es el menor de los segmentos con un extremo P y el otro extremo un punto de r.

149. Definición (tangente a una circunferencia):
Llamaremos **tangente** a una circunferencia a toda recta perpendicular a un radio por el extremo del radio que pertenece a la circunferencia.



150. Observación:
La distancia del centro de una circunferencia a una recta tangente a la misma, es un radio.

151. Propiedad:
La intersección de una circunferencia con un tangente a la misma contiene un único punto.

Se demuestra a partir de la observación 148 y la unicidad de la perpendicular a una recta por un punto exterior.

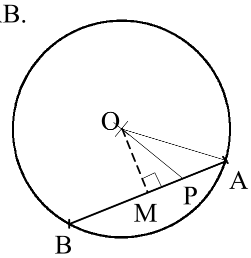
152. Teorema:
Los puntos interiores de una cuerda, son puntos interiores del círculo.

H)	**T)**
$\mathscr{C}_{O,r}$ circunferencia de centro O y radio r $A \in \mathscr{C}_{O,r}$ $B \in \mathscr{C}_{O,r}$ $A \neq B$ P punto interior del segmento $\overline{AB}$	P punto interior del círculo de centro O y radio r

Sea $m_{\overline{AB}}$ la mediatriz del segmento $\overline{AB}$, y sea M el punto de intersección de $m_{\overline{AB}}$ con AB.

Por el teorema 139: $\begin{cases} O \in m_{\overline{AB}} \Rightarrow d(O,AB) \underset{g}{=} \overline{OM} \Rightarrow_{\text{(observación 148)}} \overline{OM} \underset{g}{<} \overline{OA} \underset{g}{=} r \ ^{(*)} \\ M \text{ punto medio de } \overline{AB} \Rightarrow M \text{ punto interior de } \overline{AB} \end{cases}$

Si $P = M \Rightarrow_{(*)}$ P es punto interior del círculo



Si $P \neq M \Rightarrow$ P está entre A y M o P está entre B y M

Supongamos que P está entre A y M (el otro caso es análogo):

$\angle OPA \underset{g}{=} \angle OMA + \angle OPM \Rightarrow \angle OPA \underset{g}{>}$ ángulo recto $\Rightarrow$

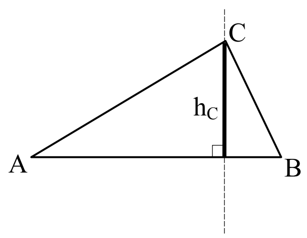
$\Rightarrow_{\text{(teorema 109 en OPA)}} \overline{OP} \underset{g}{<} \overline{OA} \underset{g}{=} r \Rightarrow$ P es punto interior del círculo

153. Teorema:
Dada una cuerda $\overline{AB}$, los puntos de AB-$\overline{AB}$ son puntos exteriores del círculo.

Demostración similar a la anterior.

154. Corolario:
La intersección de una recta y una circunferencia contiene, a lo sumo, dos puntos.

155. Definición (alturas de un triángulo):
Llamaremos **altura** de un triángulo a cada uno de los segmentos determinados por un vértice y su proyección ortogonal sobre la recta que contiene al lado opuesto (en algunas ocasiones, por razones de comodidad, llamaremos altura a la recta que contiene al segmento; el contexto permitirá distinguir cuándo se trata del segmento y cuándo de la recta).

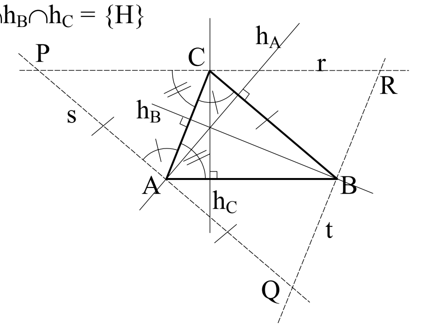


156. Teorema:

Las alturas de un triángulo son concurrentes.

H)
ABC triángulo
h_A altura correspondiente al vértice A
h_B altura correspondiente al vértice B
h_C altura correspondiente al vértice C

T)
$\exists$ H tal que $h_A \cap h_B \cap h_C = \{H\}$



Sean: r||AB por C; s||BC por A; t||AC por B
Sean P, Q y R tales que: $r \cap s = \{P\}$; $s \cap t = \{Q\}$; $t \cap r = \{R\}$

$$r \parallel AB \Rightarrow_{\text{(alternos internos)}} \left\{ \begin{array}{l} \angle CAB \underset{g}{=} \angle ACB \\ \angle CAB \underset{g}{=} \angle ACB \\ \overline{AC} \text{ común} \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \underset{g}{=} CPA \Rightarrow \overline{BC} \underset{g}{=} \overline{AP}$$

Análogamente se demuestra que $ABC \underset{g}{=} BAQ$ y que $\overline{BC} \underset{g}{=} \overline{AQ}$

$\Rightarrow$ A punto medio de $\overline{PQ}$ $\Rightarrow$ (definición)

$$\left. \begin{array}{l} h_A \text{ altura} \Rightarrow h_A \perp BC \\ BC \parallel PQ \end{array} \right\} \Rightarrow_{\text{(teorema 104)}} h_A \perp PQ$$

$\Rightarrow h_A$ es mediatriz de $\overline{PQ}$

De la misma manera, se demuestra: $\left\{ \begin{array}{l} h_B \text{ es la mediatriz de } \overline{QR} \\ h_C \text{ es la mediatriz de } \overline{PR} \end{array} \right.$

$\Rightarrow_{\text{(teorema 141)}} \exists$ H tal que $h_A \cap h_B \cap h_C = \{H\}$

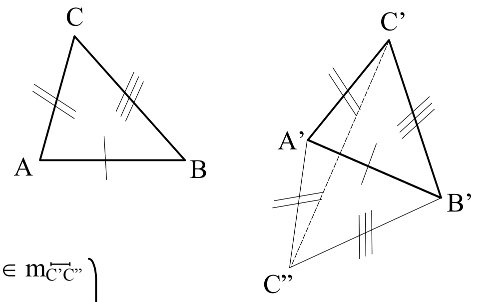
157. Definición (ortocentro):

Llamaremos **ortocentro** de un triángulo al punto de intersección de sus alturas.

158. Teorema (3^{er} criterio de igualdad de triángulos):

H)
$\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{A'B'}$
$\overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C'}$
$\overline{BC} \underset{g}{=} \overline{B'C'}$

T)
$ABC \underset{g}{=} A'B'C'$



Sea m el movimiento tal que $\left\{ \begin{array}{l} m(A) = A' \\ m(B) = B' \\ m[AB(C)] = op[A'B'(C')] \end{array} \right.$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Sea } C'' = m(C) \\ m(A) = A' \end{array} \right\} \Rightarrow m(\overline{AC}) = \overline{A'C''} \Rightarrow \overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C''}$$

por hipótesis: $\overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C'}$

$m[AB(C)] = op[A'B'(C')]$

$\Rightarrow_{\text{(teorema 139)}} A' \in m_{\overline{C'C''}}$

$$\left. \begin{array}{l} C'' = m(C) \\ m(B) = B' \end{array} \right\} \Rightarrow m(\overline{BC}) = \overline{B'C''} \Rightarrow \overline{BC} \underset{g}{=} \overline{B'C''}$$

por hipótesis: $\overline{BC} \underset{g}{=} \overline{B'C'}$

$m[AB(C)] = op[A'B'(C')]$

$\Rightarrow_{\text{(teorema 139)}} B' \in m_{\overline{C'C''}}$

$\Rightarrow A'B' = m_{\overline{C'C''}} \Rightarrow$

$\Rightarrow_{\text{(teorema 138)}} C' = S_{A'B'}(C'')$

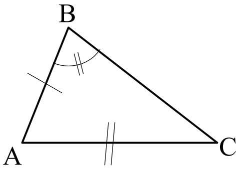
Sea $n = S_{A'B'} \circ m$

$$\left. \begin{array}{l} n(A) = A' \\ n(B) = B' \\ n(C) = C' \end{array} \right\} \Rightarrow ABC \underset{g}{=} A'B'C'$$

159. Teorema (4º criterio de igualdad de triángulos):

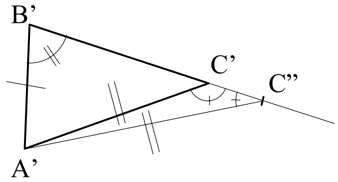
H)
ABC y $A'B'C'$ triángulos
$\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{A'B'}$
$\overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C'}$
$\angle B \underset{g}{=} \angle B'$
$\overline{AC} \underset{g}{>} \overline{AB}$

T)
$ABC \underset{g}{=} A'B'C'$



Como $\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{A'B'} \Rightarrow \exists\ m$ tal que $m(A) = A'$ y $m(B) = B'$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Sea } m \text{ tal que } m[AB(C)] = A'B'(C')\\ \text{Como } \angle B \underset{g}{=} \angle B'\end{array}\right\} \Rightarrow m(\overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{B'C'}\\ \text{Sea } C'' = m(C)\end{array}\right\} \Rightarrow C'' \in \overrightarrow{B'C'}$$



Supongamos que $C'' \neq C'$ y $C'' \in op(\overrightarrow{C'B'})$

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}m(A) = A'\\ m(C) = C''\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C''}\\ \\ \text{Por hipótesis: } \overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C'}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}A'C'C'' \text{ isósceles} \Rightarrow A'C'C'' \text{ isoángulo} \Rightarrow \angle A'C''B' \underset{g}{=} \angle A'C'C''\\ \angle A'C'C'' \underset{g}{>} \angle B' \text{ (por ser ángulo externo en el } A'B'C')\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \angle A'C''B' \underset{g}{>} \angle B' \Rightarrow \overline{A'B'} \underset{g}{>} \overline{A'C''} \Rightarrow \overline{AB} \underset{g}{>} \overline{AC}$ (contra la hipótesis)

Análogamente se contradice la hipótesis suponiendo $C'' \neq C'$ y $C'' \in \overrightarrow{C'B'}$
Por lo tanto: $C' = C''$

$\therefore$ Como $m(A) = A'$, $m(B) = B'$ y $m(C) = C' \Rightarrow ABC \underset{g}{=} A'B'C'$

160. Definición (bisectriz):

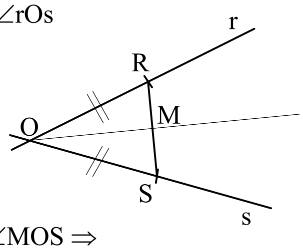
Se llama **bisectriz** de un ángulo al rayo interior que divide al ángulo en dos ángulos iguales geométricamente.

161. Teorema (Existencia y unicidad de la bisectriz):

La bisectriz de un ángulo existe y es única.

H)
$\angle rOs$

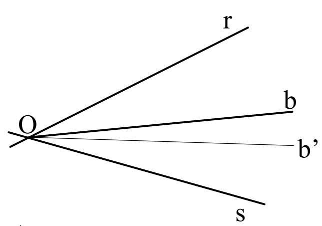
T)
$\exists!\ \overrightarrow{Ob}$ bisectriz de $\angle rOs$



Existencia:
Sea $R \in \overrightarrow{Or}$, $R \neq O$
Sea $S \in \overrightarrow{Os}$ tal que $\overline{OS} \underset{g}{=} \overline{OR}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sea M punto medio de } \overline{RS} \Rightarrow \overline{MR} \underset{g}{=} \overline{MS}\\ \qquad \overline{OR} \underset{g}{=} \overline{OS}\\ \qquad \overline{OM} \text{ común}\end{array}\right\} \Rightarrow OMR \underset{g}{=} OMS \Rightarrow \angle MOR \underset{g}{=} \angle MOS \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM}$ es bisectriz de $\angle rOs$



Unicidad:
Supongamos que existe $\overrightarrow{Ob'}$ bisectriz de $\angle rOs$, $\overrightarrow{Ob'} \neq \overrightarrow{Ob}$

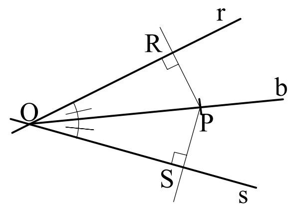
Sin perder generalidad, supongamos que $\overrightarrow{Ob'}$ es rayo interior del $\angle bOs$.
$\angle rOb \underset{g}{<} \angle rOb' \underset{g}{=} \angle b'Os \underset{g}{<} \angle bOs \Rightarrow \angle rOb \underset{g}{<} \angle bOs$ (lo cual es absurdo, porque $\overrightarrow{Ob}$ es bisectriz de $\angle rOs$)

162. Teorema:

La bisectriz es el lugar geométrico de los puntos del ángulo que equidistan de sus lados.

Subteorema 1:

H)	**T)**
$\overrightarrow{Ob}$ es bisectriz de $\angle rOs$ $P \in \overrightarrow{Ob}$	$d(P,r) \equiv_g d(P,s)$



Sean R y S las proyecciones ortogonales de P sobre r y s, respectivamente.

Si $P = O \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R = O \\ S = O \end{array} \right\} \Rightarrow d(P,r) \equiv_g d(P,s)$

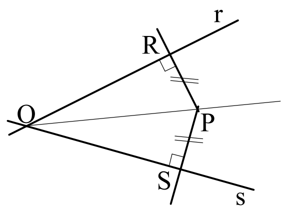
Si $P \neq O$, consideremos los triángulos OPS y OPR:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle POR \equiv_g \angle POS \text{ (por ser } \overrightarrow{Ob} \text{ bisectriz)} \\ \angle OSP \equiv_g \angle ORP \equiv_g \text{recto (definición de proyección ortogonal)}\end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(suma de ángulos)}} \angle OPS \equiv_g \angle OPR \\ \overline{OP} \text{ común}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow_{\text{(2º criterio)}}$ OPS $\equiv_g$ OPR $\Rightarrow \overline{PS} \equiv_g \overline{PR} \Rightarrow_{\text{(definición de distancia de un punto a una recta)}} d(P,r) \equiv_g d(P,s)$

Subteorema 2:

H)	**T)**
$P \in \angle rOs$ tal que $d(P,r) \equiv_g d(P,s)$ $\overrightarrow{Ob}$ bisectriz de $\angle rOs$	$P \in \overrightarrow{Ob}$



Si $d(P,r) \equiv_g d(P,s) \equiv_g \oslash \Rightarrow P \in r$ y $P \in s \Rightarrow P = O \Rightarrow P \in \overrightarrow{Ob}$

Si $d(P,r) \equiv_g d(P,s) \not\equiv_g \oslash$:

Sean S y R las proyecciones ortogonales de P sobre las rectas r y s, respectivamente.

Consideremos los triángulos OSP y ORP:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{OP} \text{ común} \\ \overline{PS} \equiv_g \overline{PR} \text{ (por hipótesis)} \\ \angle OSP \equiv_g \angle ORP \equiv_g \text{recto (definición de proyección ortogonal)} \\ \overline{OP} \gneq_g \overline{PS} \text{ (por ser OPS rectángulo)}\end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(4º criterio)}} OSP \equiv_g ORP \Rightarrow \angle SOP \equiv_g \angle ROP \Rightarrow$$

$\Rightarrow_{\text{(definición de bisectriz)}} P \in \overrightarrow{Ob}$

163. Teorema:

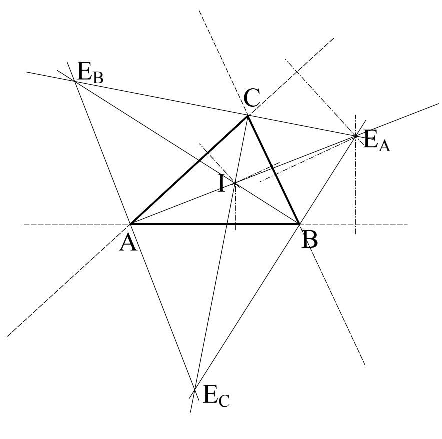
Las bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo, son concurrentes.

Se demuestra aplicando el teorema 162.

164. Teorema:

La bisectriz de un ángulo interior de un triángulo y las bisectrices de ángulos exteriores correspondientes a los otros dos vértices, son concurrentes.

Demostración similar a la del teorema 163.



165. Definición (incentro):

Llamaremos **incentro** de un triángulo al punto de intersección de las bisectrices de sus ángulos interiores.

166. Definición (exincentros):

Llamaremos **exincentro** de un triángulo al punto de intersección de la bisectriz interior de uno de sus ángulos con las bisectrices de ángulos exteriores correspondientes a los otros dos vértices. Quedan definidos así tres exincentros en un triángulo, cada uno perteneciente a uno de los ángulos interiores.

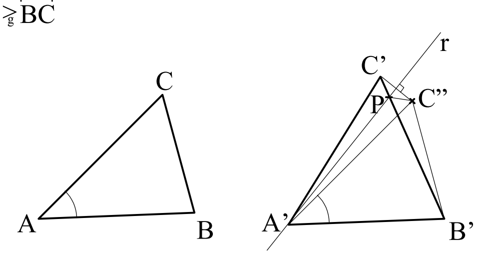
167. Propiedad:

El incentro y los exincentros equidistan de las rectas que contienen a los lados del triángulo. En consecuencia, son centros de circunferencias tangentes a los lados del mismo. Llamaremos **circunferencia inscripta** a la que tiene como centro el incentro, y **circunferencias exinscriptas** a las que tienen como centros los exincentros.

168. Teorema (de los Triángulos incongruentes):

H)
ABC y $A'B'C'$ triángulos
$\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{A'B'}$
$\overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C'}$
$\angle A' \underset{g}{>} \angle A$

T)
$\overline{B'C'} \underset{g}{>} \overline{BC}$



Como $\overline{AB} \underset{g}{=} \overline{A'B'} \Rightarrow \exists\, m$ movimiento tal que $m(A) = A'$, $m(B) = B'$ y $m[AB(C)] = A'B'(C')$

Sea $m(C) = C''$

Como $m(A) = A'$ y $m(C) = C'' \Rightarrow \overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C''}$
por hipótesis: $\overline{AC} \underset{g}{=} \overline{A'C'}$
$\Rightarrow \overline{A'C'} \underset{g}{=} \overline{A'C''} \Rightarrow A' \in r$, mediatriz de $\overline{C'C''}$

$\angle A' \underset{g}{>} \angle A \Rightarrow C''$ interior a $\angle C'A'B'$

$\Rightarrow \overline{A'r}$ rayo interior de $\angle C'A'B' \Rightarrow$ (teorema del rayo interior) $\exists$ P tal que $r \cap \overline{C'B'} = \{P\}$

En $PC''B'$:
$\overline{PC''} + \overline{PB'} \underset{g}{>} \overline{C''B'}$ (teorema 138)
Como $P \in r$, $\overline{PC''} \underset{g}{=} \overline{PC'}$
$\Rightarrow \overline{PC'} + \overline{PB'} \underset{g}{>} \overline{C''B'} \Rightarrow$ (definición de suma de segmentos) $\overline{C'B'} \underset{g}{>} \overline{C''B'}$

Como $m(B) = B'$ y $m(C) = C'' \Rightarrow \overline{C''B'} \underset{g}{=} \overline{CB}$

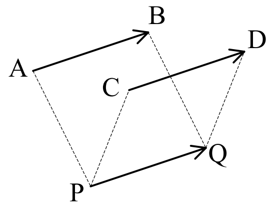
$\Rightarrow \overline{C'B'} \underset{g}{>} \overline{CB}$

Capítulo 5

En este capítulo encontraremos:
Definiciones: segmento orientado, relación de equipolencia, vector; suma vectorial; producto escalar; traslación; rotación.
Teoremas y propiedades relativos a los vectores y los segmentos orientados; propiedades de la traslación.
Propiedades de la rotación.

169. Definición (segmento orientado):
Dados dos puntos A y B, llamaremos **segmento orientado** $\overrightarrow{AB}$ al segmento $\overline{AB}$ junto con una relación de orden sobre la recta AB en la cual $A \prec B$. A esa relación de orden, le llamaremos **sentido** del segmento orientado. A la metafigura del segmento $\overline{AB}$, le llamaremos **módulo** del segmento orientado.

170. Definición (equipolencia):
Dos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son **equipolentes** si y sólo si $\exists\ \overrightarrow{PQ}$ tal que ABQP y CDQP sean paralelogramos.



171. Observación:
Si ABDC es paralelogramo, entonces $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, pero esta condición no permite definir la equipolencia para el caso en que A, B, C y D están alineados.

172. Teorema:
Dados un segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ y un punto P, existe y es único el segmento orientado $\overrightarrow{PQ}$ equipolente a $\overrightarrow{AB}$.

173. Teorema:
La equipolencia es una relación de equivalencia en el conjunto de los segmentos orientados.

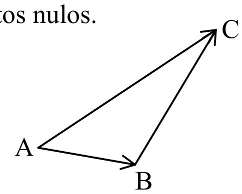
Se demuestra aplicando la definición de equipolencia y propiedades de los paralelogramos.

174. Definición (vector):
Llamaremos vector a cada una de las clases de equivalencia definidas por la relación de equipolencia.

175. Observación:
Los segmentos orientados equipolentes son iguales geométricamente (tienen el mismo módulo), tienen una misma dirección, y se puede establecer una equivalencia entre sus sentidos. Por lo tanto, cada vector queda determinado por un módulo, una dirección y un sentido.

176. Notación:
De ahora en adelante, representaremos un vector haciendo referencia a uno cualquiera de sus segmentos orientados.

177. Definición (vector nulo):
Llamaremos vector nulo (lo notaremos $\vec{o}$) a la metafigura de los segmentos nulos.



178. Definición (suma vectorial):
Dados dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{u}$, sean $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ dos segmentos orientados pertenecientes a cada uno de ellos, respectivamente. $\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AC}$.

Esta definición puede extenderse sin inconvenientes a la suma del vector nulo.

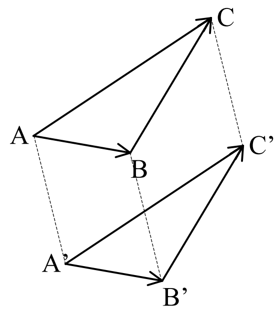
179. Observación:
De la definición surge claramente la existencia de la suma de vectores. Corresponde entonces, demostrar la unicidad.

180. Teorema (unicidad de la suma de vectores):

Del teorema 172 surge que dados dos segmentos orientados, la suma a partir de ellos es única. Lo que falta demostrar entonces es lo siguiente:

H)
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{B'C'}$

T)
$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$



Supongamos que A, B, A’ y B’ no alineados, y que B, C, B’ y C’ tampoco.
Entonces, por la observación 171, podemos afirmar:
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow$ ABB’A’ paralelogramo $\Rightarrow_{\text{(observación 113)}} \begin{cases} \overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \\ \overline{AA'} \underset{g}{=} \overline{BB'} \end{cases}$

Análogamente, $\begin{cases} \overline{BB'} \parallel \overline{CC'} \\ \overline{BB'} \underset{g}{=} \overline{CC'} \end{cases}$

Por las propiedades transitivas del paralelismo y de la igualdad geométrica, tenemos que $\begin{Bmatrix} \overline{AA'} \parallel \overline{CC'} \\ \overline{AA'} \underset{g}{=} \overline{CC'} \end{Bmatrix} \Rightarrow_{\text{(observación 113)}}$ ACC’A’ paralelogramo $\Rightarrow_{\text{(observación171)}} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$

En caso de que A, B, A’ y B’ alineados o que B, C, B’ y C’ alineados entonces es posible aplicar lo demostrado anteriormente para otro par de segmentos orientados $\overrightarrow{A''B''}$ y $\overrightarrow{B''C''}$, y luego volver a aplicarlo para $\overrightarrow{A'B'}$ y $\overrightarrow{B'C'}$.

181. Teorema:

La estructura formada por el conjunto de los vectores y la suma vectorial es un grupo conmutativo.

Es necesario demostrar las propiedades: asociativa, existencia del neutro, existencia del recíproco (que llamaremos opuesto), y conmutativa.

Dejamos a cargo del estudiante demostrar que el neutro es el vector nulo, y que para todo vector $\overrightarrow{AB}$ su opuesto es el vector $\overrightarrow{BA}$.

Propiedad asociativa:
$(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

Propiedad conmutativa:
Dados $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$, tomemos D tal que ABCD sea paralelogramo.
Por definición de suma vectorial: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$
Por observación 171: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$

182. Definición (producto escalar):[6]

Dados un vector $\overrightarrow{AB}$ y un racional q>0, sea $q\cdot\overrightarrow{AB}$ el vector que tiene la misma dirección y el mismo sentido que $\overrightarrow{AB}$, y cuyo módulo es $q\cdot\overline{AB}$ (ver definición 69). Si q<0, sea $q\cdot\overrightarrow{AB} = |q|\cdot\overrightarrow{BA}$. Si q = 0, sea $q\cdot\overrightarrow{AB} = \vec{o}$.

183. Definición (traslación):

Dados dos puntos A y B, se llama **traslación** de vector $\overrightarrow{AB}$ (lo notaremos $T_{\overrightarrow{AB}}$) al movimiento directo tal que $T_{\overrightarrow{AB}}(\overline{AB}) = op(\overline{BA})$.

[6] Observación:
Esta definición puede extenderse a un escalar real, pero para ello es necesario un desarrollo teórico que se hará más adelante.

184. Teorema:

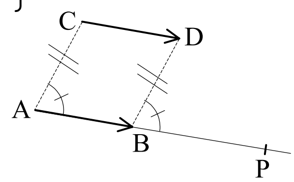
El vector determinado por un punto y su correspondiente es igual al vector de traslación.

H)	**T)**
$T_{\overrightarrow{AB}}(C) = D$	$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

Supongamos $C \notin AB$:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \text{Sea } P \in op(\overline{BA}) \Rightarrow T_{\overrightarrow{AB}}(\overline{AB}) = \overline{BP} \\ T_{\overrightarrow{AB}}(C) = D \end{array}\right\} \\ \text{(definición de traslación) } T_{\overrightarrow{AB}}(A) = B \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \angle CAB \underset{g}{=} \angle DBP \Rightarrow \text{(recíproco del teorema 102) } CA \| DB \\ \overline{CA} \underset{g}{=} \overline{DB} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(observación 113)}$$

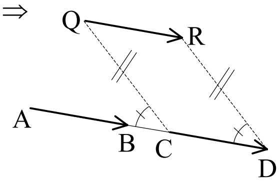
$\Rightarrow$ ABDC paralelogramo $\Rightarrow$ (observación 171) $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$



Si $C \in AB \Rightarrow$ (definición de traslación) $D \in AB$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Tomemos } Q \notin AB \text{ y } R = T_{\overrightarrow{AB}}(Q) \\ B = T_{\overrightarrow{AB}}(A) \\ D = T_{\overrightarrow{AB}}(C) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \angle BDR \underset{g}{=} \angle ACQ \Rightarrow \text{(recíproco del teorema 102) } DR \| CQ \\ \overline{DR} \underset{g}{=} \overline{CQ} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \text{(observación 113) CDRQ paralelogramo} \Rightarrow \text{(observación 171) } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{QR} \\ \text{Por lo demostrado anteriormente, podemos afirmar que } \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AB} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$$



185. Corolario:

Las traslaciones no tienen puntos unidos.

186. Observación:

Toda traslación está determinada por su vector, es decir es independiente del segmento orientado considerado en su definición.

187. Observación:

Podemos considerar el movimiento identidad como una traslación de vector nulo.

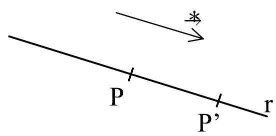
188. Corolario:

Las rectas paralelas al vector de traslación son dobles en dicha traslación.

189. Propiedad (recíproco del corolario 187):

Las rectas dobles en una traslación son paralelas al vector de traslación.

H)	**T)**
$T_{\vec{v}}(r) = r$	$r \| \vec{v}$



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{Sea } P \in r, \text{ y sea } P' = T_{\vec{v}}(P) \\ \text{Por hipótesis: } T_{\vec{v}}(r) = r \end{array}\right\} \Rightarrow P' \in r \Rightarrow PP' = r \\ \overrightarrow{PP'} = \vec{v} \text{ (teorema 184)} \end{array}\right\} \Rightarrow r \| \vec{v}$$

190. Propiedad:

Las rectas correspondientes en una traslación son paralelas.

H)	**T)**
$T_{\vec{v}}(r) = r'$	$r \| r'$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sean } A \neq B, \text{ ambos pertenecientes a } r \Rightarrow AB = r \\ \left.\begin{array}{l} \text{y sean } A' = T_{\vec{v}}(A) \text{ y } B' = T_{\vec{v}}(B) \\ \text{Por hipótesis: } T_{\vec{v}}(r) = r' \end{array}\right\} \Rightarrow A'B' = r' \\ \text{Por teorema 184: } \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \vec{v} \Rightarrow AA'B'B \text{ paralelogramo} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{(definición de paralelogramo) } r \| r'$$

191. Propiedad:

La composición de dos traslaciones es otra traslación cuyo vector es la suma vectorial de los vectores de las dos primeras.

192. *Observación:*
Existe un isomorfismo[7] entre la estructura formada por el conjunto de los vectores y la suma vectorial, y la estructura formada por el conjunto de las traslaciones y la composición.

193. *Propiedad:*
El inverso de una traslación es la traslación de vector opuesto.

194. *Propiedades:*
La composición de dos simetrías centrales de distinto centro es una traslación cuyo vector es el doble del vector determinado por los centros de las simetrías.
La composición de tres simetrías centrales es otra simetría central, cuyo centro es el cuarto vértice del paralelogramo determinado por los otros tres.
La composición de dos simetrías axiales de ejes paralelos es una traslación cuyo vector es perpendicular a los ejes de las simetrías y su módulo es el doble de la distancia entre dichos ejes.
La composición de una traslación con una simetría axial de eje perpendicular al vector, es otra simetría axial.

195. *Definición (rotación):*
Dadas dos semirrectas del mismo origen $\overline{Or}$ y $\overline{Os}$, se llama **rotación** de centro O y ángulo $\alpha \underset{g}{=} \angle rOs$ (lo notaremos $R_{O,\alpha}$) al movimiento directo tal que $R_{O,\alpha}(\overline{Or}) = \overline{Os}$.

196. *Nota:*
Por convención consideraremos el ángulo $\angle rOs$ convexo, e indicaremos el sentido (horario o antihorario) en que se recorre el ángulo, de la semirrecta $\overline{Or}$ a la $\overline{Os}$.

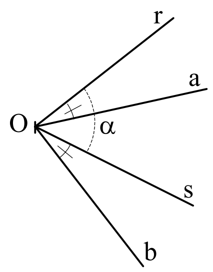
197. *Observación:*
Podemos considerar la identidad como una rotación de ángulo nulo. También es posible considerar a toda simetría central como una rotación de ángulo llano.

198. *Teorema:*
En toda rotación, una semirrecta con origen en el centro y su correspondiente determinan un ángulo igual geométricamente al ángulo de rotación y del mismo sentido.

H)	**T)**
$R_{O,\alpha}(\overline{Oa}) = \overline{Ob}$	$\angle aOb \underset{g}{=} \alpha$ $\angle aOb$ y α están orientados en el mismo sentido.

Sean $\overline{Or}$ y $\overline{Os}$ las semirrectas consideradas en la definición de $R_{O,\alpha}$.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Es decir: } R_{O,\alpha}(\overline{Or}) = \overline{Os}\\ \text{Por hipótesis: } R_{O,\alpha}(\overline{Oa}) = \overline{Ob}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle rOa \underset{g}{=} \angle sOb\\ \text{Supongamos que } \overline{Oa} \text{ es rayo interior de } \angle rOs \Rightarrow_{\text{(suma de ángulos)}} \angle rOs \underset{g}{=} \angle rOa + \angle aOs\end{array}\right\} \Rightarrow$$



$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \angle rOs \underset{g}{=} \angle sOb + \angle aOs\\ R_{O,\alpha} \text{ es un movimiento directo} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\overline{Ob} \subset op[\overline{Os}(\overline{Oa})]\\ \angle rOs \text{ y } \angle aOb \text{ están orientados en el mismo sentido.}\end{array}\right.\end{array}\right\} \Rightarrow_{\text{(suma de ángulos)}} \angle rOs \underset{g}{=} \angle aOb$$

De manera similar se demuestra para el caso en que $\overline{Oa}$ no es rayo interior de $\angle rOs$.

199. *Observación:*
La rotación queda determinada por su centro, por un ángulo igual geométricamente al ángulo de rotación y por su sentido, es decir, es independiente de las semirrectas consideradas en su definición.

200. *Corolario:*
El centro es el único punto unido en una rotación.

201. *Propiedad:*
El centro de rotación pertenece a la mediatriz del segmento determinado por un punto y su correspondiente.

[7] Definición:
Un **isomorfismo** entre dos estructuras es una función biyectiva entre los conjuntos de las mismas, que conserva las operaciones y las relaciones. Si existe un isomorfismo entre dos estructuras, se dice que las mismas son **isomorfas**.

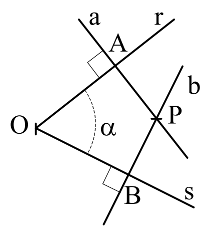
202. Teorema:

En toda rotación, una recta y su correspondiente determinan un ángulo igual geométricamente al ángulo de rotación.

H)	**T)**
$R_{O,\alpha}(a) = b$	a y b determinan un ángulo igual geométricamente a α.

Si $O \in a$, ya está demostrado por el teorema 198.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\text{Sea } r\perp_O a \text{ y sea } r\cap a=\{A\}\\ \text{Sea } s=R_{O,\alpha}(r)\text{ y sea } B=R_{O,\alpha}(A)\end{array}\right\}\Rightarrow s\perp_O b\\ \text{Sea } a\cap b=\{P\}\end{array}\right\}\Rightarrow \text{en AOBP, } \angle OAP+\angle OBP \underset{g}{=} \angle\text{llano} \Rightarrow$$



$\Rightarrow_{\text{(observación 107)}} \angle APB+\angle AOB \underset{g}{=} \angle\text{llano} \Rightarrow \angle APB$ y $\angle AOB$ son suplementarios $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOB$ es igual geométricamente a los ángulos adyacentes al $\angle APB$

$B = R_{O,\alpha}(A) \Rightarrow \angle AOB \underset{g}{=} \alpha$

203. Propiedad:

El centro de rotación pertenece a la bisectriz de uno de los ángulos determinados por una recta y su correspondiente.

204. Propiedad:

La composición de dos rotaciones concéntricas es otra rotación del mismo centro cuyo ángulo es la suma de los ángulos de las dos primeras (considerando los sentidos).

Se demuestra aplicando el teorema 198.

205. Observación:

Debe tenerse en cuenta las limitaciones de la definición de suma de ángulos mencionadas en la observación 26.[8]

206. Propiedad:

El inverso de una rotación es otra rotación del mismo centro, igual ángulo, y sentido opuesto.

207. Propiedad:

La composición de dos simetrías axiales de ejes no paralelos es una rotación cuyo centro es el punto de intersección de los dos ejes, y su ángulo es el doble del ángulo que forman los mismos.

208. Propiedades:

La composición de dos rotaciones no concéntricas de ángulos no opuestos es otra rotación cuyo ángulo es la suma de los ángulos de las dos primeras (considerando los sentidos).
La composición de dos rotaciones no concéntricas de ángulos opuestos es una traslación.
La composición de una rotación con una simetría axial cuyo eje pasa por centro de rotación, es otra simetría axial.

[8] Nota:
Es posible proponer una definición de la suma de ángulos (alternativa a la definición 67) basándose en los resultados de la composición de rotaciones concéntricas, estableciendo un isomorfismo de manera similar al planteado en la observación 192.

Capítulo 6

En este capítulo encontraremos:
Definición de antitraslación. Propiedades de la antitraslación; teorema fundamental de movimientos.

209. Definición (antitraslación):

Dados dos puntos A y B, se llama **antitraslación** de eje AB y vector $\overrightarrow{AB}$ (lo notaremos $A_{AB,\overrightarrow{AB}}$) al movimiento indirecto tal que $A_{AB,\overrightarrow{AB}}(\overleftrightarrow{AB}) = op(\overleftrightarrow{BA})$.

210. Propiedad:

La antitraslación de eje AB y vector $\overrightarrow{AB}$ es igual a la composición de la simetría de eje AB con la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$. En consecuencia, la composición de una simetría con una traslación de vector paralelo al eje, es una antitraslación de ese eje y ese vector. La misma propiedad es válida para la composición de la traslación de vector $\overrightarrow{AB}$ con la simetría de eje AB.

211. Propiedad:

El punto medio del segmento determinado por un punto y su correspondiente en una antitraslación, pertenece al eje de la misma.

H)	**T)**
$A_{e,\vec{v}}(P) = P'$	$M \in e$
M punto medio de $\overline{PP'}$	

Sea $P_1 = T_{\vec{v}}(P)$.

Por la propiedad 210, $\left.\begin{array}{l} S_e(P_1) = P' \Rightarrow_{\text{(teorema 137)}} e \text{ es mediatriz de } \overline{P_1P'} \\ \text{Como } \vec{v} \| e \Rightarrow PP_1 \| e \end{array}\right\} \Rightarrow$ e es paralela media en el triángulo PP_1P'

$\Downarrow$ (teorema 114)

$M \in e$

212. Propiedad:

Las antitraslaciones no tienen puntos unidos.

Se demuestra aplicando la propiedad 210 y propiedades de las simetrías axiales y de las traslaciones.

213. Propiedades:

La composición de una simetría axial con una traslación de vector no perpendicular al eje, es una antitraslación.
La composición de una simetría axial con una simetría central cuyo centro no pertenece al eje, es una antitraslación.
La composición de una simetría axial con una rotación cuyo centro no pertenece al eje, es una antitraslación.
La composición de tres simetrías axiales de ejes no concurrentes es una antitraslación.

214. Teorema (Teorema fundamental de movimientos):

Todo movimiento es la identidad, o una simetría axial, o una rotación, o una traslación, o una antitraslación.

<u>Subteorema 1:</u> Todo movimiento con tres puntos no alineados unidos, es la identidad.

H)	**T)**
$m(A) = A$	$m = I$
$m(B) = B$	
$m(C) = C$	
A, B y C no alineados	

Supongamos que existe P tal que $m(P) = P'$ y $P \neq P'$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} m(A) = A \\ m(P) = P' \end{array}\right\} \Rightarrow m(\overline{AP}) = \overline{AP'} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{AP} \underset{g}{=} \overline{AP'} \\ P \neq P' \end{array}\right\} \Rightarrow A \in m_{\overline{PP'}} \\ \text{Análogamente: } \left\{\begin{array}{l} B \in m_{\overline{PP'}} \\ C \in m_{\overline{PP'}} \end{array}\right. \end{array}\right\} \Rightarrow \text{A, B y C alineados (contradice la hipótesis)}$$

$\Downarrow$

$\forall$ P, $m(P) = P \Rightarrow \boxed{m = I}$

Subteorema 2: Todo movimiento con dos puntos distintos unidos, es la identidad o una simetría axial.

H)
$m(A) = A$
$m(B) = B$
$A \neq B$

T)
$m = I$ o $m = S_{AB}$

Si existe otro punto no alineado con A y B que sea unido, entonces por el subteorema 1, $\boxed{m = I}$

Si no existe un punto en esas condiciones, entonces sea $P \notin AB$ y sea P' tal que $m(P) = P' \Rightarrow P \neq P'$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} m(A) = A \\ m(P) = P' \end{array}\right\} \Rightarrow m(\overline{AP}) = \overline{AP'} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{AP} \underset{g}{=} \overline{AP'} \\ P \neq P' \end{array}\right\} \Rightarrow A \in m_{\overline{PP'}} \\ \text{Análogamente: } B \in m_{\overline{PP'}} \\ \text{Por hipótesis: } A \neq B \end{array}\right\} \Rightarrow AB = m_{\overline{PP'}}$$

Sea $n = m^{o}S_{AB}$

$$\left.\begin{array}{l} n(A) = m^{o}S_{AB}(A) = m[S_{AB}(A)] = _{\text{(porque A pertenece al eje de simetría)}} m(A) = _{\text{(por hipótesis)}} A \Rightarrow n(A) = A \\ n(B) = m^{o}S_{AB}(B) = m[S_{AB}(B)] = _{\text{(porque B pertenece al eje de simetría)}} m(B) = _{\text{(por hipótesis)}} B \Rightarrow n(B) = B \\ n(P') = m^{o}S_{AB}(P') = m[S_{AB}(P')] = _{\text{(porque AB es mediatriz de } \overline{PP'})} m(P) = _{\text{(por hipótesis)}} P' \Rightarrow n(P') = P' \\ \text{Además, por hipótesis: } P \notin AB \end{array}\right\} \Rightarrow _{\text{(por subteorema 1)}} n = I$$

$n = I \Rightarrow m^{o}S_{AB} = I \Rightarrow \boxed{m = S_{AB}}$

Subteorema 3: Todo movimiento con un punto unido es la identidad, o una simetría axial, o una rotación.

H)
$m(A) = A$

T)
$m = I$ o $m = S_e$ (con $A \in e$) o $m = R_{A,\alpha}$

Si existe otro punto distinto de A, unido en m, entonces por el subteorema 2, $\boxed{m = I}$ o $\boxed{m = S_e \ (A \in e)}$.

Si no existe un punto en esas condiciones, entonces A es el único punto unido en m.
Sea $P \neq A$, y sea P' tal que $m(P) = P' \Rightarrow P \neq P'$
Sea $r = m_{\overline{PP'}}$

$$\left.\begin{array}{l} m(A) = A \\ m(P) = P' \end{array}\right\} \Rightarrow m(\overline{AP}) = \overline{AP'} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \overline{AP} \underset{g}{=} \overline{AP'} \\ P \neq P' \end{array}\right\} \Rightarrow A \in r$$

Sea $n = m^{o}S_r$

$$\left.\begin{array}{l} n(A) = m^{o}S_r(A) = m[S_r(A)] = _{\text{(porque } A \in r)} m(A) = _{\text{(por hipótesis)}} A \Rightarrow n(A) = A \\ n(P') = m^{o}S_r(P') = m[S_r(P')] = _{\text{(porque r es mediatriz de } \overline{PP'})} m(P) = _{\text{(por hipótesis)}} P' \Rightarrow n(P') = P' \end{array}\right\} \Rightarrow _{\text{(subteorema 2)}} n = I \text{ o } n = S_{AP'}$$

Si $n = I \Rightarrow m^{o}S_r = I \Rightarrow m = S_r$ (no es posible, porque m tiene solamente un punto unido)

$$\text{Si } n = S_{AP'} \Rightarrow m^{o}S_r = S_{AP'} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} m = S_{AP'}{}^{o}S_r \\ AP' \cap r = \{A\} \end{array}\right\} \Rightarrow _{\text{(propiedad 207)}} \boxed{m = R_{A,\alpha}}$$

Subteorema 4: Todo movimiento que no tiene puntos unidos es una traslación o una antitraslación.

H)
$\forall P, m(P) \neq P$

T)
$m = T_{\vec{v}}$ o $m = A_{e,\vec{v}}$

Sea P' tal que $m(P) = P' \Rightarrow _{\text{(por hipótesis)}} P \neq P'$
Sea $r = m_{\overline{PP'}}$

Sea $n = m^{o}S_r$

$$n(P') = m^{o}S_r(P') = m[S_r(P')] = _{\text{(porque r es mediatriz de } \overline{PP'})} m(P) = _{\text{(por hipótesis)}} P' \Rightarrow n(P) = P' \Rightarrow _{\text{(subteorema 3)}} \begin{array}{l} n = I \\ \text{o } n = S_e \text{ (con } P' \in e) \\ \text{o } n = R_{P',\alpha} \end{array}$$

Si $n = I \Rightarrow m \circ S_r = I \Rightarrow m = S_r$ (no es posible porque *m* no tiene puntos unidos)

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } n = S_e \Rightarrow m\circ S_r = S_e \Rightarrow m = S_e\circ S_r \\ \left.\begin{array}{r} P'\in e \\ r = m_{\overline{PP'}}\end{array}\right\} \Rightarrow e \neq r \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{si } e\cap r = \{O\} \Rightarrow \text{(propiedad 207) } m = R_O \text{ (no es posible porque } m \text{ no tiene puntos unidos)} \\ \text{si } e\parallel r \Rightarrow \text{(propiedad 194) } \boxed{m = T_{\vec{v}}} \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Si } n = R_{P'} \Rightarrow m\circ S_r = R_{P'} \Rightarrow m = R_{P'}\circ S_r \\ r = m_{\overline{PP'}} \Rightarrow P'\notin r\end{array}\right\} \Rightarrow \text{(propiedad 213) } \boxed{m = A_{e,\vec{v}}}$$